7.1.4 Střed úsečky

Předpoklady: 070103

Př. 1: Urči vzdálenost bodů a) $A[1;1;-2]$ a $B[2;3;-1]$ b) $C[3;1;-1]$ a $D[0;1;-2]$.

a) $|AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2} = \sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2+[-1-(-2)]^2} =$
$= \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}$

b) $|CD| = \sqrt{(d_1-c_1)^2+(d_2-c_2)^2+(d_3-c_3)^2} = \sqrt{(0-3)^2+(1-1)^2+[(-2)-(-1)]^2} =$
$= \sqrt{3^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$

Př. 2: Na ose *z* najdi bod, který má od bodu $C[2;-2;1]$ vzdálenost 3.

Podobné příkladu z minulé hodiny $\Rightarrow$ bod na ose *z* má nenulovou pouze *z*-ovou souřadnici $Z[0;0;z]$.

Dosazení do vzorce pro vzdálenost:

$|CZ| = \sqrt{(z_1-c_1)^2+(z_2-c_2)^2+(z_3-c_3)^2} = \sqrt{(0-2)^2+[0-(-2)]^2+(z-1)^2} = 3$

$\sqrt{2^2+2^2+(z-1)^2} = 3 \quad /^2$

$4+4+z^2-2z+1=9$

$z^2-2z=0$

$z(z-2)=0$

$z_1=2 \Rightarrow Z_1[0;0;2]$ $\qquad$ $z_2=0 \Rightarrow Z_2[0;0;0]$

Př. 3: Na ose *x* najdi bod, který má od bodu $A[5;-4;-2]$ dvakrát větší vzdálenost než od bodu $B[-1;2;1]$.

Bod na ose *x* $\Rightarrow$ souřadnice $X[x;0;0]$.

Má platit: $|XA| = 2|XB|$, dosadíme:

$\sqrt{(x-5)^2+[0-(-4)]^2+[0-(-2)]^2} = 2\sqrt{[x-(-1)]^2+(0-2)^2+(0-1)^2}$

$\sqrt{(x-5)^2+4^2+2^2} = 2\sqrt{(x+1)^2+(-2)^2+(-1)^2} \quad /^2$

$x^2-10x+25+16+4 = 4(x^2+2x+1+4+1)$

$x^2-10x+45 = 4x^2+8x+24$

$0 = 3x^2+18x-21$

$x^2+6x-7=0$

$(x+7)(x-1)=0$

$x_1 = -7 \Rightarrow X_1[-7;0;0]$ $\qquad$ $x_2 = 1 \Rightarrow X_2[1;0;0]$

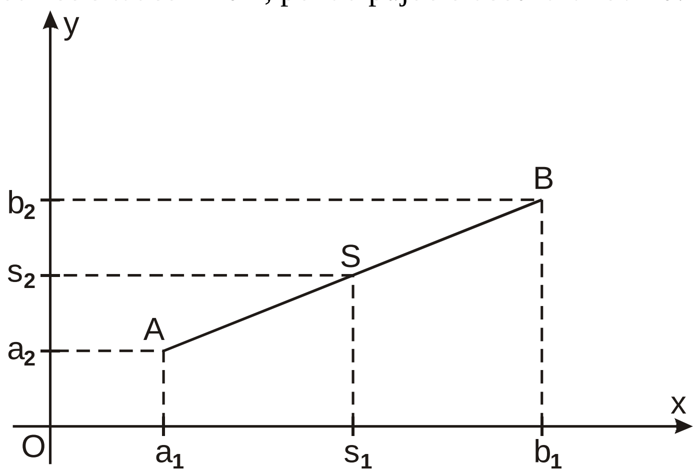
Pedagogická poznámka: Opět se asi vyskytne nezanedbatelné procento žáků, kteří zapíší podmínku ze zadání špatně $2|XA| = |XB|$. Je nutné trvat na tom, že nezáleží na tom, který z bodů má k dvojce v zadání blíže, ale na tom, která vzdálenost je větší (to žáci poznávají bezpečně) a podle toho rovnost doplnit (viz. hodina 1702 – 1703).

Střed úsečky dělí úsečku na dvě stejné části.

Na číselné ose máme dva body $A[7]$ a $B[3]$. Kde se na ose nachází střed úsečky *AB*?
Pokud má být uprostřed, musí ležet na čísle 5, tedy $S[5]$.

Jakým matematickým postupem k této hodnotě dojdeme?
Spočítáme průměr z hodnot pro oba krajní body $\frac{7+3}{2} = 5$. Logické, protože střed úsečky je „průměrem" z jejích krajních bodů.

Jak se situace změní, pokud půjde o úsečku v rovině?



Situace na obou souřadných osách je stejná jako předtím $\Rightarrow$ spočteme obě souřadnice stejným způsobem jako průměry odpovídajících souřadnic krajních bodů.

Pro střed $S[s_1;s_2]$ úsečky *AB*, kde $A[a_1;a_2]$, $B[b_1;b_2]$ platí:

$$s_1 = \frac{a_1+b_1}{2},\ s_2 = \frac{a_2+b_2}{2}.$$

Př. 4: Sestav analogickou větu pro výpočet souřadnic středu úsečky v prostoru.

Pro střed $S[s_1;s_2;s_3]$ úsečky *AB*, kde $A[a_1;a_2;a_3]$, $B[b_1;b_2;b_3]$ platí:

$$s_1 = \frac{a_1+b_1}{2},\ s_2 = \frac{a_2+b_2}{2},\ s_3 = \frac{a_3+b_3}{2}.$$

Pedagogická poznámka: Z předchozího příkladu se dozvíte kromě toho, jak studenti dávali pozor při výkladu i to, zda jste moc nepospíchali. Občas se objevují i vzorce typu $s_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}$, které vycházejí z úsečky určené třemi body *A*, *B*, *C*.

Př. 5: Urči střed úsečky *AB*, pokud platí:
a) $A[2;-1]$, $B[6;3]$ b) $A\left[3;3\sqrt{2}\right]$, $B\left[-3;\sqrt{2}\right]$

a) $s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$ $s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$

Středem úsečky *AB* je bod $S_{AB}[4;1]$.

b) $s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{3+(-3)}{2} = 0$ $s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

Středem úsečky *AB* je bod $S_{AB}\left[0;2\sqrt{2}\right]$.

Př. 6: Jsou dány body $A[1;-2;-3]$ a $B[5;-4;1]$. Urči střed úsečky *AB*. Spočti vzdálenosti $|AB|$, $|AS|$, $|BS|$ a ověř, zda střed dělí úsečku na dvě stejné části.

Spočteme souřadnice středu:

$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$ $s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{-2+(-4)}{2} = -3$ $s_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1$

Vzdálenosti:

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (-4-(-2))^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$|AS| = \sqrt{(s_1 - a_1)^2 + (s_2 - a_2)^2 + (s_3 - a_3)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (-3-(-2))^2 + (-1-(-3))^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|BS| = \sqrt{(b_1 - s_1)^2 + (b_2 - s_2)^2 + (b_3 - s_3)^2} = \sqrt{(5-3)^2 + (-4-(-3))^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{9} = 3$$

Př. 7: Jsou dány body $S[1;-2;3]$ a $B[2;3;-1]$. Urči souřadnice bodu *A* tak, aby bod *S* byl středem úsečky *AB*.

Dosadíme do rovnic pro souřadnice středu úsečky:

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{a_1 + 2}{2} = 1 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{a_2 + 3}{2} = -2 \Rightarrow a_2 = -7$$

$$s_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{a_3 + (-1)}{2} = 3 \Rightarrow a_3 = 7$$

Bod *A* má souřadnice $A[0;-7;7]$.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti popletení předchozím příkladem zkusí vyřešit tento příklad pomocí vzdálenosti. Snažím se je navést k tomu, aby si uvědomili, že tak získají jedinou rovnici se třemi neznámými, zatímco pomocí vzorců pro střed

úsečky mají tři rovnice s jedinou neznámou.
Jinak jde o dobrou ukázku příkladu, který je pomocí rovnice strašně jednoduchý, ale pro okamžité hádání vcelku obtížný.

Shrnutí: Souřadnice středu úsečky počítáme jako průměr odpovídajících souřadnic krajních bodů.