

7.2.3 Násobení vektoru číslem I

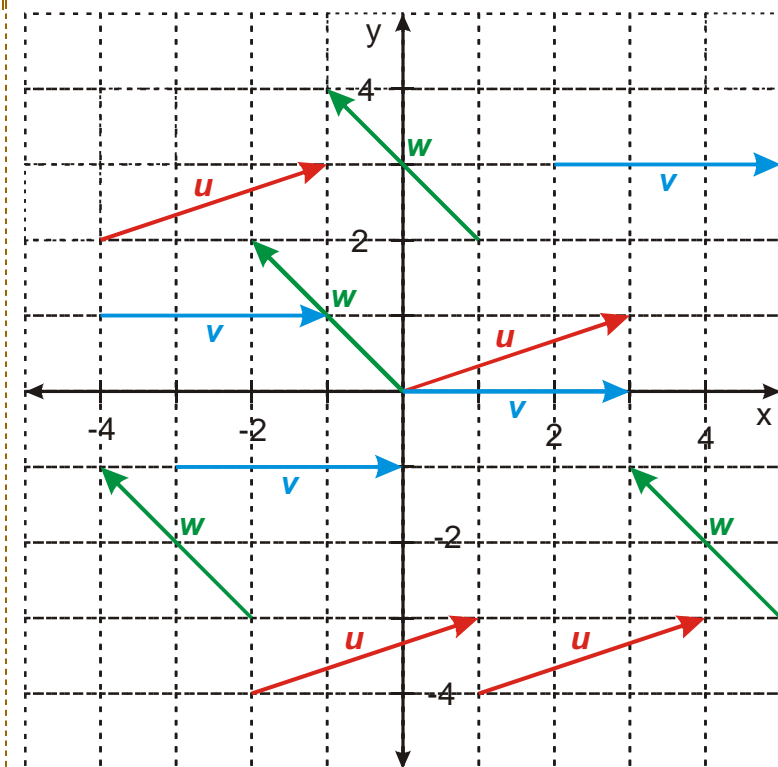
Předpoklady: 7201

Př. 1: Zakresli do soustavy souřadnic alespoň dvě různá umístění vektorů:

a) $\mathbf{u} = (3;1)$

b) $\mathbf{v} = (3;0)$

c) $\mathbf{w} = (-2;2)$



Pedagogická poznámka: Předchozí příklad není zbytečný. Je nutné u studentů neustále kontrolovat, zda mají představu vektoru jako množiny šipek s danou velikostí a směrem.

Všechny orientované úsečky, které jsou umístěním vektoru, mají stejnou velikost \Rightarrow má smysl mluvit o velikosti vektoru.

Zřejmě je velikost vektoru \mathbf{u} (značíme $|\mathbf{u}|$) rovna délce libovolné orientované úsečky \mathbf{AB} , která je jeho umístěním: $|\mathbf{u}| = |\mathbf{AB}|$.

Jestliže $|\mathbf{u}| = 1$ říkáme, že vektor \mathbf{u} je **jednotkový**.

Pedagogická poznámka: Pokud zadáte žákům na tabuli konkrétní vektor a necháte je určit jeho velikost, skoro všichni uspějí a pak odvodí i obecný vzorec.

Jak spočítáme velikost vektoru?

Umíme spočítat vzdálenost dvou bodů \Rightarrow vezmeme krajní body libovolného umístění \mathbf{AB} vektoru \mathbf{u} : $A[a_1; a_2; a_3]$, $B[b_1; b_2; b_3]$ a určíme jejich vzdálenost.

Velikost orientované úsečky \mathbf{AB} : $|\mathbf{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} = |\mathbf{u}|$.

Rádi bychom počítali velikost vektoru z jeho souřadnic, platí: $b_1 - a_1 = u_1$, $b_2 - a_2 = u_2$,
 $b_3 - a_3 = u_3 \Rightarrow |\mathbf{u}| = |\mathbf{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

Pro každý vektor $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$ platí $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

Pro každý vektor $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$ platí $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

Př. 2: Je dán vektor $\mathbf{u} = (2; -\sqrt{5})$. Urči $|\mathbf{u}|$.

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{2^2 + (-\sqrt{5})^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Př. 3: Je dán vektor $\mathbf{v} = (1; -2; 3)$. Urči $|\mathbf{v}|$.

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

Př. 4: Urči vektor \mathbf{w} jestliže platí: $w_x = -3$ a $|\mathbf{w}| = 5$.

Musíme určit druhou souřadnici vektoru w_y .

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = 5$$

$$\sqrt{(-3)^2 + w_y^2} = 5 \quad /^2$$

$$(-3)^2 + w_y^2 = 25$$

$$w_y^2 = 16$$

$$w_y^2 - 16 = 0$$

$$(w_y - 4)(w_y + 4) = 0$$

$$w_{y1} = 4 \quad w_{y2} = -4$$

$$\mathbf{w} = (-3; 4) \quad \text{nebo} \quad \mathbf{w} = (-3; -4)$$

Násobení vektorů číslem začneme definicí.

Násobek nulového vektoru číslem k je nulový vektor.

Násobek nenulového vektoru $\mathbf{u} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$ číslem k je vektor $\mathbf{C} - \mathbf{A}$, přičemž \mathbf{C} je bod, pro který platí:

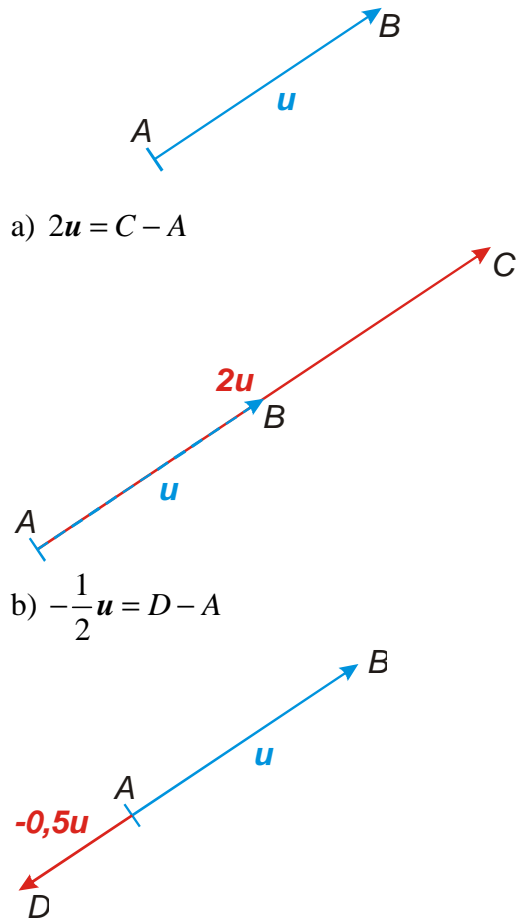
- $|\mathbf{AC}| = |k| |\mathbf{AB}|$,
- je-li $k \geq 0$ leží bod \mathbf{C} na polopřímce \mathbf{AB} , je-li $k < 0$, leží bod \mathbf{C} na polopřímce opačné k polopřímce \mathbf{AB} .

Vektor $\mathbf{C} - \mathbf{A}$ označujeme symbolem $k\mathbf{u}$.

Dodatek: Definice násobení vektorů je velmi podobná definici stejnolehlosti \Rightarrow bod C je stejnohlehlý s bodem B ve stejnolehlosti $H(A; k)$.

Př. 5: Je dán vektor $\mathbf{u} = B - A$. Sestroj graficky vektory.

- a) $2\mathbf{u} = C - A$ b) $-\frac{1}{2}\mathbf{u} = D - A$



V pořádné matematické učebnici se ještě dokazuje, že výsledný vektor nezávisí na volbě umístění vektoru \mathbf{u} . Důkaz využívající posunutí přeskočíme.

Jaké budou souřadnice vektoru $k\mathbf{u}$?

Pomocí stejnolehlosti se dají odvodit věty:

Pro každý vektor $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$ v rovině a pro každé reálné číslo k platí:

$$k\mathbf{u} = (ku_1; ku_2).$$

Pro každý vektor $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$ v prostoru a pro každé reálné číslo k platí:

$$k\mathbf{u} = (ku_1; ku_2; ku_3).$$

Př. 6: Je dán vektor $\mathbf{u} = (1; 2; -3)$. Urči souřadnice vektorů.

- a) $2\mathbf{u}$ b) $-3\mathbf{u}$ c) $\sqrt{2} \cdot \mathbf{u}$

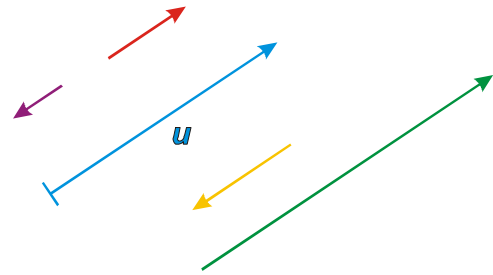
a) $2\mathbf{u} = 2(1; 2; -3) = (2 \cdot 1; 2 \cdot 2; 2 \cdot [-3]) = (2; 4; -6)$

$$b) -3\mathbf{u} = -3(1; 2; -3) = (-3 \cdot 1; -3 \cdot 2; -3 \cdot [-3]) = (-3; -6; 9)$$

$$c) \sqrt{2} \cdot \mathbf{u} = \sqrt{2}(1; 2; -3) = (\sqrt{2} \cdot 1; \sqrt{2} \cdot 2; \sqrt{2} \cdot [-3]) = (\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; -3\sqrt{2})$$

Pedagogická poznámka: Stejně jako u sčítání doporučuji studentům psát zkrácený zápis takto: $2\mathbf{u} = 2(1; 2; -3) = (2; 4; -6)$.

Př. 7: Nakresli libovolný vektor a několik jeho co nejrůznějších násobků. Co mají všechny nakreslené vektory společného?



Všechny vektory získané násobením vektoru \mathbf{u} jsou s vektorem \mathbf{u} rovnoběžné (mají stejný nebo opačný směr).

Dva vektory jsou rovnoběžné (leží na stejné přímce), právě když je jeden násobkem druhého.

Př. 8: Rozhodni výpočtem (bez kreslení obrázků), které z následujících vektorů jsou rovnoběžné s vektorem $\mathbf{u} = (3; -2)$.

$$a) \mathbf{a} = (2; -3) \qquad b) \mathbf{b} = (6; 4) \qquad c) \mathbf{c} = (6; -4)$$

$$d) \mathbf{d} = (3\sqrt{2}; -2\sqrt{2}) \qquad e) \mathbf{e} = (-6; 9)$$

$$a) \mathbf{a} = (2; -3) \neq k(3; -2) \Rightarrow \text{vektor } \mathbf{a} \text{ není rovnoběžný s vektorem } \mathbf{u}.$$

$$b) \mathbf{b} = (6; 4) \neq k(3; -2) \Rightarrow \text{vektor } \mathbf{b} \text{ není rovnoběžný s vektorem } \mathbf{u}.$$

$$c) \mathbf{c} = (6; -4) = 2(3; -2) \Rightarrow \text{vektor } \mathbf{c} \text{ je rovnoběžný s vektorem } \mathbf{u}.$$

$$d) \mathbf{d} = (3\sqrt{2}; -2\sqrt{2}) = \sqrt{2}(3; -2) \Rightarrow \text{vektor } \mathbf{d} \text{ je rovnoběžný s vektorem } \mathbf{u}.$$

$$e) \mathbf{e} = (-6; 9) = -3(2; -3) \Rightarrow \text{vektor } \mathbf{e} \text{ není rovnoběžný s vektorem } \mathbf{u}.$$

Pedagogická poznámka: Pokud má někdo s příkladem problémy, samozřejmě obrázky kreslíme. Nakreslíme si vektor, jeho složky, které pak v jednom případě vynásobíme stejnými čísly, v druhém různými a opět složíme.

Př. 9: Doplň větu s pravidly.

Pro každé dva vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} a každá dvě čísla k, l platí:

a) $0 \cdot \mathbf{u} =$ b) $(-1) \cdot \mathbf{u} =$ c) $k(l\mathbf{u}) =$

d) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) =$ e) $(k+l)\mathbf{u} =$

a) $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{o}$

b) $(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$

c) $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$

d) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$

e) $(k+l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$

Platí pravidla, která známe z násobení reálných čísel \Rightarrow při násobení vektorů budeme moci postupovat tak, jak jsme zvyklí.

Př. 10: Jsou dány vektory $\mathbf{u} = (1; -3; 1)$ a $\mathbf{v} = (2; 2; -1)$. Urči vektor:

a) $\mathbf{w} = 3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$,

b) $\mathbf{z} = -2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$.

a) $\mathbf{w} = 3\mathbf{u} + 2\mathbf{v} = 3(1; -3; 1) + 2(2; 2; -1) = ([3 \cdot 1 + 2 \cdot 2]; [3 \cdot (-3) + 2 \cdot 2]; [3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1)]) =$
 $= (7; -5; 1)$

b) $\mathbf{z} = -2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = -2(1; -3; 1) + 3(2; 2; -1) =$
 $= ([(-2) \cdot 1 + 3 \cdot 2]; [(-2) \cdot (-3) + 3 \cdot 2]; [(-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-1)]) = (4; 12; -5)$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je možné řešit i postupně určením násobků a pak jejich součtu.

Př. 11: Petáková:

strana 100/cvičení 18

strana 100/cvičení 19

Shrnutí: Násobením vektoru reálným číslem měníme jeho velikost (u záporných čísel i obracíme směr).