

## 7.2.4 Lineární kombinace vektorů

### Předpoklady: 7203

**Př. 1:** Jsou dány vektory  $u = (1; -3; 1)$  a  $v = (2; 2; -1)$ . Urči vektor  $w = 2u - 3v$ .

$$\begin{aligned} w = 2u - 3v &= 2(1; -3; 1) - 3(2; 2; -1) = ([2 \cdot 1 - 3 \cdot 2]; [2 \cdot (-3) - 3 \cdot 2]; [2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1)]) = \\ &= (-4; -12; 5) \end{aligned}$$

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad je možné řešit i postupně určením násobků a pak jejich součtu.

Vektor  $w$  jsme získali jako součet násobků vektorů  $u$  a  $v$ , říkáme, že vektor  $w$  je **lineární kombinací** vektorů  $u$  a  $v$ .

Jsou dány vektory  $u_1; u_2; \dots; u_n$  a reálná čísla  $a_1; a_2; \dots; a_n$ . Vektor  $v = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n$  se nazývá **lineární kombinace vektorů  $u_1; u_2; \dots; u_n$** . Reálná čísla  $a_1; a_2; \dots; a_n$  nazýváme **koefficienty této lineární kombinace**.

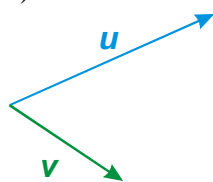
**Př. 2:** V předchozím příkladu byl hledaný vektor  $w$  jako lineární kombinace vektorů  $u$  a  $v$  určen vztahem  $w = 2u - 3v$ . Urči koeficienty této lineární kombinace a číslo  $n$ .

$$w = 2u - 3v \Rightarrow \text{vektor } w \text{ je lineární kombinací dvou vektorů} \Rightarrow n = 2$$

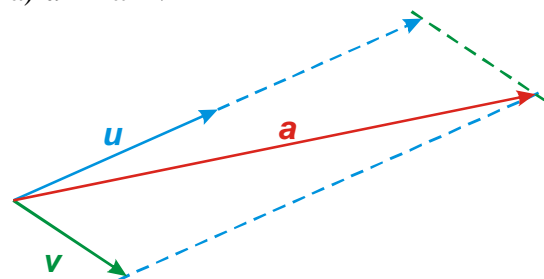
$$\begin{aligned} \text{srovnáme vztahy: } w &= 2u - 3v \\ v &= a_1u_1 + a_2u_2 \end{aligned} \Rightarrow a_1 = 2, a_2 = -3.$$

**Pedagogická poznámka:** Jako vždy v podobných příkladech i tady mají studenti největší problémy s určením čísla  $n$ .

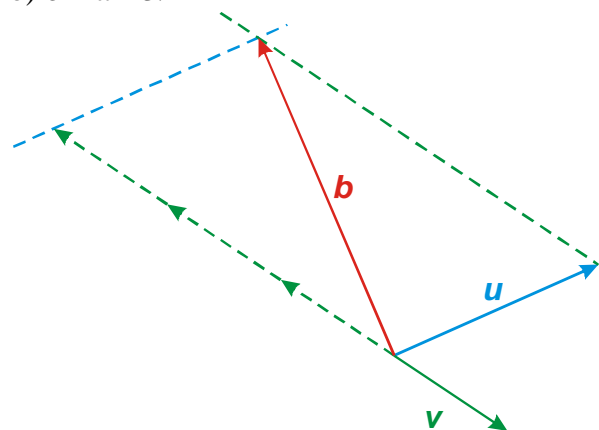
**Př. 3:** Na obrázku jsou zakresleny vektory  $u$  a  $v$ . Do obrázku jejich lineární kombinace:  
a)  $a = 2u + v$                       b)  $b = u - 3v$                       c)  $c = -0,5u + 0v$



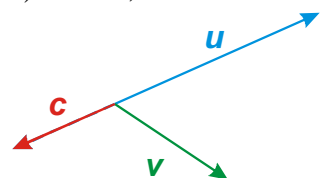
a)  $a = 2u + v$



b)  $\mathbf{b} = \mathbf{u} - 3\mathbf{v}$



c)  $\mathbf{c} = -0,5\mathbf{u} + 0\mathbf{v}$



**Př. 4:** Je dán čtverec  $ABCD$  a středy jeho stran  $S_{AB}$ ,  $S_{BC}$ ,  $S_{CD}$  a  $S_{DA}$ . Označíme si vektory  $\mathbf{u} = S_{AB} - A$  a  $\mathbf{v} = S_{DA} - A$ . Vyjádři jako lineární kombinaci vektorů  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  vektory:

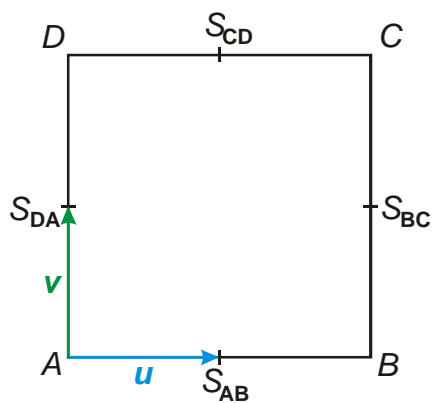
a)  $S_{CD} - S_{AD}$

b)  $C - B$

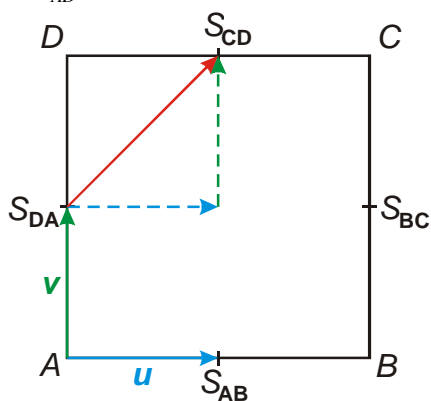
c)  $S_{CD} - B$

d)  $D - C$

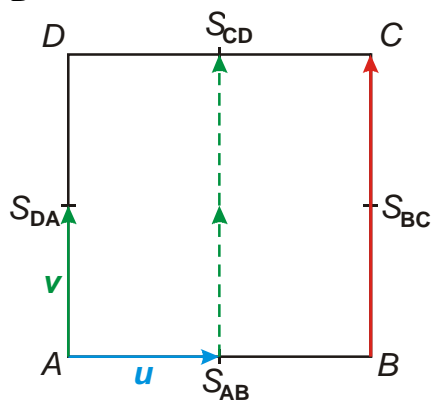
e)  $S_{AB} - C$



a)  $S_{CD} - S_{AD}$



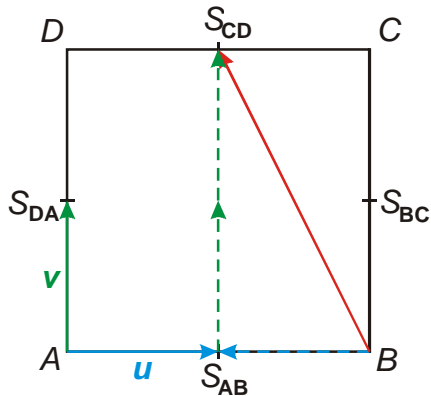
b)  $C - B$



$$S_{CD} - S_{AD} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

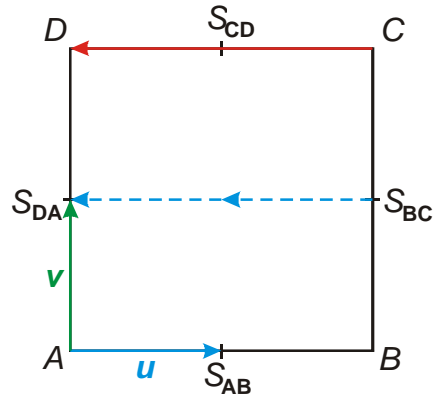
$$C - B = 0\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$$

c)  $S_{CD} - B$



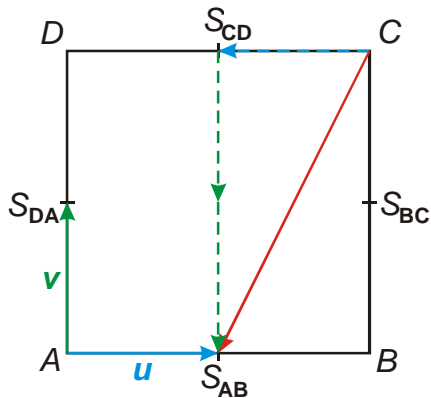
$$S_{CD} - B = -\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$$

d)  $D - C$



$$D - C = -2\mathbf{u} + 0\mathbf{v}$$

e)  $S_{AB} - C$



$$S_{AB} - C = -\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$$

a)  $S_{CD} - S_{AD} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$

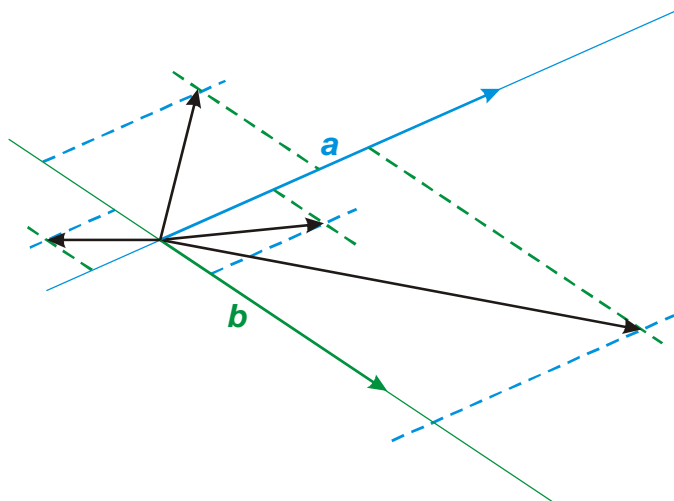
b)  $C - B = 0\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$

c)  $S_{CD} - B = -\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$

d)  $D - C = -2\mathbf{u} + 0\mathbf{v}$

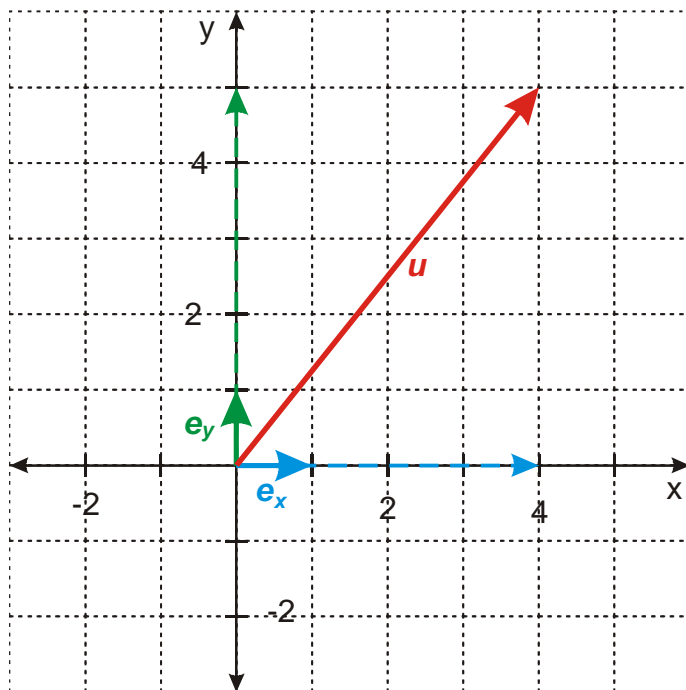
e)  $S_{AB} - C = -\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$

Máme dva vektory  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  v rovině. Co získáme, když budeme vyrábět všechny možné lineární kombinace těchto vektorů?



Získáme všechny vektory v rovině.

Co vlastně znamená, že vektor  $u$  má souřadnice  $u = (u_1; u_2)$ ?



Souřadnice vektoru jsou vlastně koeficienty lineární kombinace, kterou sestavíme tento vektor pomocí jednotkových vektorů ve směrech souřadných os.

**Př. 5:** Jsou dány vektory  $a = (-1; 2; 4)$  a  $b = (2; 1; 1)$ . Rozhodni, zda vektory:

a)  $u = (-5; 5; 11)$ ,

b)  $v = (1; 3; 3)$

jsou lineární kombinací vektorů  $a, b$ . Pokud ano, urči koeficienty této lineární kombinace.

a)  $u = (-5; 5; 11)$

Pokud je vektor  $u$  lineární kombinací vektorů  $a, b$ , musí platit:

$u = ka + lb$  - protože vektory mají tři souřadnice, jde o soustavu tří rovnic (pro každou

$$u_1 = ka_1 + lb_1$$

souřadnici jedna rovnice) pro dvě neznámé (hledané koeficienty  $k, l$ ):  $u_2 = ka_2 + lb_2$ .

$$u_3 = ka_3 + lb_3$$

$$-5 = k(-1) + l \cdot 2$$

Dosadíme souřadnice:  $5 = k \cdot 2 + l \cdot 1$

$$11 = k \cdot 4 + l \cdot 1$$

Odečteme druhou rovnici od třetí:

$$11 - 5 = 4k - 2k + l - l$$

$$6 = 2k \Rightarrow k = 3$$

Z druhé rovnice dopočítáme  $l$ :  $5 = 3 \cdot 2 + l \Rightarrow l = -1$

Dosadíme do první rovnice a zkontrolujeme, zda vyjde:

$$-5 = 3(-1) + (-1) \cdot 2 = -5$$

Soustava má řešení  $\Rightarrow$  vektor  $u$  je lineární kombinací vektorů  $a, b$ :  $u = 3a - b$

b)  $v = (1; 3; 3)$

pokud je vektor  $v$  lineární kombinací vektorů  $a, b$ , musí platit:

$v = ka + lb$  - protože vektory mají tři souřadnice, jde o soustavu tří rovnic (pro každou

$$v_1 = ka_1 + lb_1$$

souřadnici jedna) pro dvě neznámé (hledané koeficienty  $k, l$ ):  $v_2 = ka_2 + lb_2$

$$v_3 = ka_3 + lb_3$$

$$1 = k(-1) + l \cdot 2$$

Dosadíme souřadnice:  $3 = k \cdot 2 + l \cdot 1$

$$3 = k \cdot 4 + l \cdot 1$$

Odečteme druhou rovnici od třetí:

$$3 - 3 = 4k - 2k + l - l$$

$$0 = 2k \Rightarrow k = 0$$

Z druhé rovnice dopočítáme  $l$ :  $3 = 0 \cdot 2 + l \Rightarrow l = 3$

Dosadíme do první rovnice a zkontrolujeme, zda vyjde:

$$1 = 0(-1) + 3 \cdot 2 = 6 - \text{rovnost neplatí} \Rightarrow \text{soustava nemá řešení} \Rightarrow \text{vektor } v \text{ není lineární}$$

kombinací vektorů  $a, b$ .

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad stojí a padá s tím, jakou představu mají žáci o řešení soustav rovnic (jde o obecné představy o možnostech volby díky proměnným a jejich omezování podmínkami v rovnicích). Pokud vnímají soustavy mechanicky, s velkou pravděpodobností nebudou kontrolovat první rovnici dosazením a v obou případech jim vyjde, že vektor  $v$  je lineární kombinací vektorů  $a, b$ .

Ted' můžeme určit vektor, který bude mít určitý směr a potřebnou velikost.

**Př. 6:** Najdi vektor  $v$ , který je rovnoběžný s vektorem  $u = (3; 4)$  a jehož velikost je 1.

Dvě možnosti jak příklad vyřešit.

**1. Sestavení podmínek pro souřadnice vektoru  $v = (v_1; v_2)$**

Vektor  $\mathbf{v}$  je rovnoběžný s vektorem  $\mathbf{u} \Rightarrow$  vektor  $\mathbf{v}$  je násobek vektoru  $\mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{v} = k\mathbf{u}$   
v souřadnicích:  $v_1 = ku_1$ ,  $v_2 = ku_2$ .

Zatím dvě rovnice pro tři neznámé  $\Rightarrow$  potřebujeme ještě jednu rovnici.

Podmínka: velikost  $\mathbf{v}$  je 1  $\Rightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$ .

Máme tři rovnice pro tři neznámé. Vyřešit by to šlo, ale není to moc komfortní.

## 2. Využití velikosti vektoru $\mathbf{u}$ .

Spočítáme velikost vektoru  $\mathbf{u}$ :  $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ .

Vektor  $\mathbf{v}$  má mít velikost 1  $\Rightarrow$  musí být 5krát menší  $\Rightarrow$  platí:  $\mathbf{v} = k \cdot \mathbf{u}$ , kde  $k \in \left\{-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right\}$ .

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{1}{5}\mathbf{u} = -\frac{1}{5}(3;4) = \left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right) \qquad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{5}\mathbf{u} = \frac{1}{5}(3;4) = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$$

**Pedagogická poznámka:** Slušný chaos můžete ve třídě vyvolat, pokud ukážete na tabuli, že vektor  $\mathbf{v}$  má být pětkrát menší, existují tedy dvě řešení pro  $k \in \left\{-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right\}$  a napíšete  $\mathbf{v}_1 = a$   $\mathbf{v}_2 =$ . Někteří studenti se přestanou orientovat, že nejde o složky, ale o celé vektory a totálně zpanikaří.

**Př. 7:** Najdi vektor  $\mathbf{w}$ , který je rovnoběžný s vektorem  $\mathbf{u} = (3;4)$  a jehož velikost je 10.

Spočítáme velikost vektoru  $\mathbf{u}$ :  $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ .

Vektor  $\mathbf{w}$  má mít velikost 10  $\Rightarrow$  musí být 2krát větší.

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{u} = 2(3;4) = (6;8)$$

**Př. 8:** Petáková:

strana 99/cvičení 5

strana 100/cvičení 8

strana 100/cvičení 9

strana 100/cvičení 10

**Shrnutí:** Při násobení vektoru číslem se mění jeho velikost  $\Rightarrow$  navzájem rovnoběžné vektory jsou svými násobky.