7.2.4 Lineární kombinace vektorů

Předpoklady: 7203

Př. 1: Jsou dány vektory $\boldsymbol{u}=(1;-3;1)$ a $\boldsymbol{v}=(2;2;-1)$. Urči vektor $\boldsymbol{w}=2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

$\boldsymbol{w}=2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(1;-3;1)-3(2;2;-1)=([2\cdot 1-3\cdot 2];[2\cdot(-3)-3\cdot 2];[2\cdot 1-3\cdot(-1)])=$
$=(-4;-12;5)$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je možné řešit i postupně určením násobků a pak jejich součtu.

Vektor $\boldsymbol{w}$ jsme získali jako součet násobků vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, říkáme, že vektor $\boldsymbol{w}$ je **lineární kombinací** vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.

Jsou dány vektory $\boldsymbol{u}_1;\boldsymbol{u}_2;...;\boldsymbol{u}_n$ a reálná čísla $a_1;a_2;...;a_n$. Vektor $\boldsymbol{v}=a_1\boldsymbol{u}_1+a_2\boldsymbol{u}_2+..+a_n\boldsymbol{u}_n$ se nazývá lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{u}_1;\boldsymbol{u}_2;...;\boldsymbol{u}_n$. Reálná čísla $a_1;a_2;...;a_n$ nazýváme koeficienty této lineární kombinace.

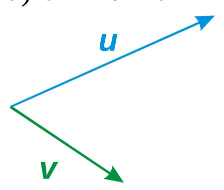
Př. 2: V předchozím příkladu byl hledaný vektor $\boldsymbol{w}$ jako lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ určen vztahem $\boldsymbol{w}=2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$. Urči koeficienty této lineární kombinace a číslo n.

$\boldsymbol{w}=2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$ $\Rightarrow$ vektor $\boldsymbol{w}$ je lineární kombinací dvou vektorů $\Rightarrow$ $n=2$

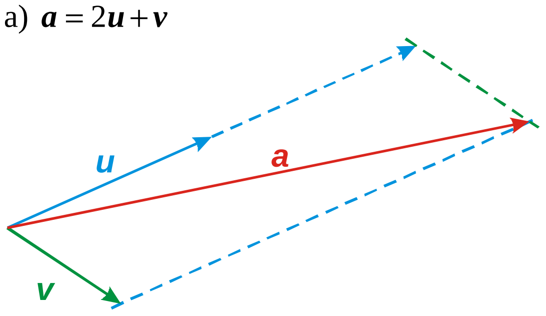
srovnáme vztahy: $\begin{array}{c}\boldsymbol{w}=2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{v}=a_1\boldsymbol{u}_1+a_2\boldsymbol{u}_2\end{array}$ $\Rightarrow$ $a_1=2$, $a_2=-3$.

Pedagogická poznámka: Jako vždy v podobných příkladech i tady mají studenti největší problémy s určením čísla n.

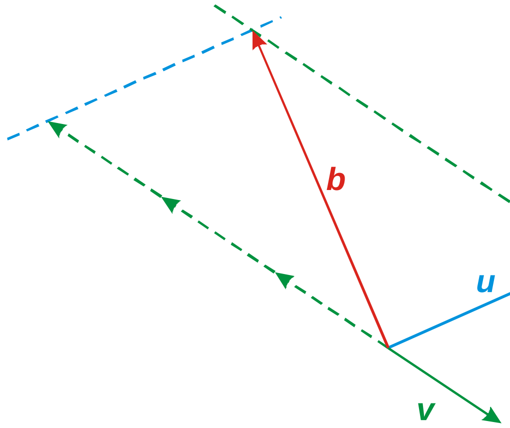
Př. 3: Na obrázku jsou zakresleny vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. Do obrázku jejich lineární kombinace:
a) $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ b) $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$ c) $\boldsymbol{c}=-0,5\boldsymbol{u}+0\boldsymbol{v}$



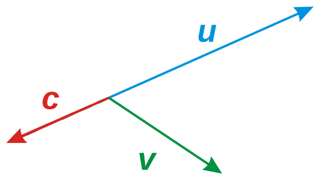
a) $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$



b) $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v}$



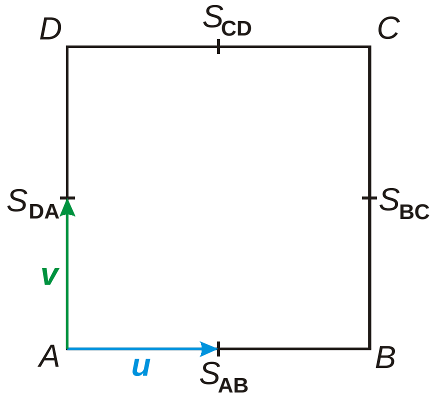
c) $\boldsymbol{c} = -0,5\boldsymbol{u} + 0\boldsymbol{v}$



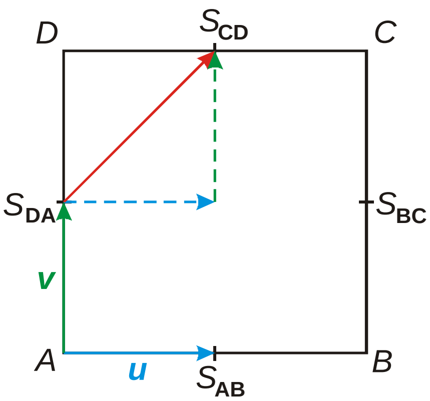
Př. 4: Je dán čtverec $ABCD$ a středy jeho stran S_{AB}, S_{BC}, S_{CD} a S_{DA}. Označíme si vektory $\boldsymbol{u} = S_{AB} - A$ a $\boldsymbol{v} = S_{AD} - A$. Vyjádři jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ vektory:

a) $S_{CD} - S_{AD}$ b) $C - B$ c) $S_{CD} - B$

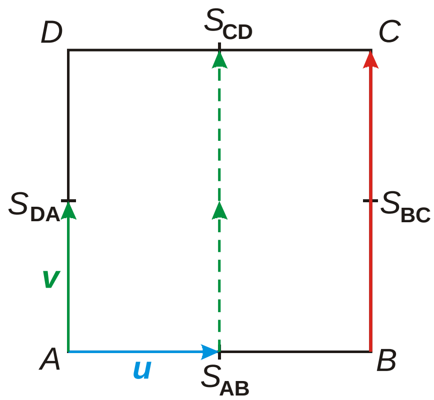
d) $D - C$ e) $S_{AB} - C$



a) $S_{CD} - S_{AD}$



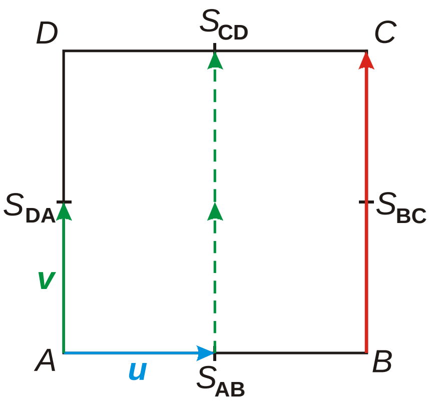
b) $C - B$



$S_{CD} - S_{AD} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$

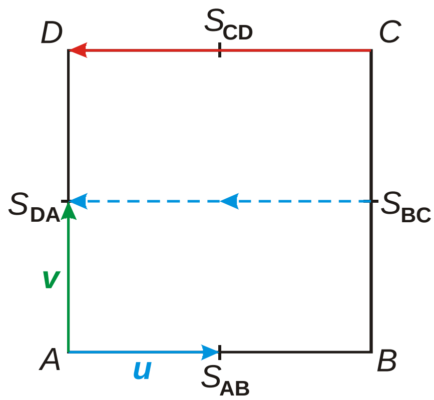
$C - B = 0\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}$

c) $S_{CD} - B$



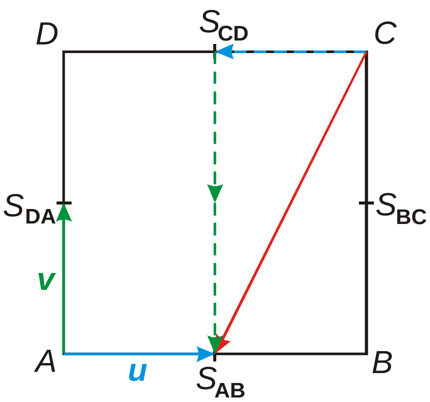
$S_{CD} - B = -\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}$

d) $D - C$



$D - C = -2\boldsymbol{u} + 0\boldsymbol{v}$

e) $S_{AB} - C$



$S_{AB} - C = -\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}$

a) $S_{CD} - S_{AD} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$

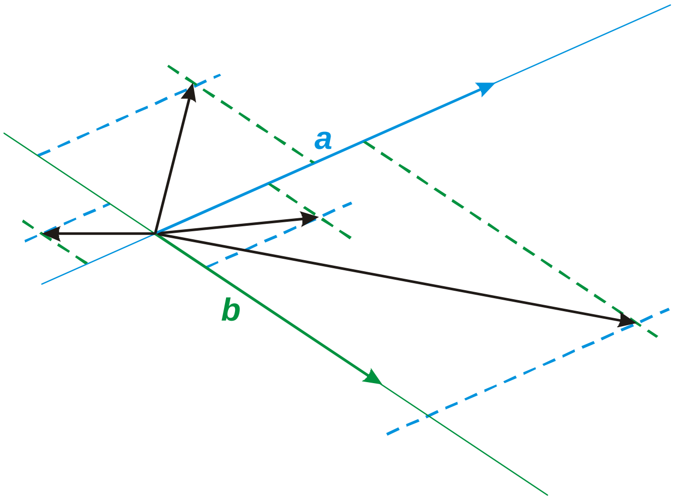
b) $C - B = 0\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}$

c) $S_{CD} - B = -\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}$

d) $D - C = -2\boldsymbol{u} + 0\boldsymbol{v}$

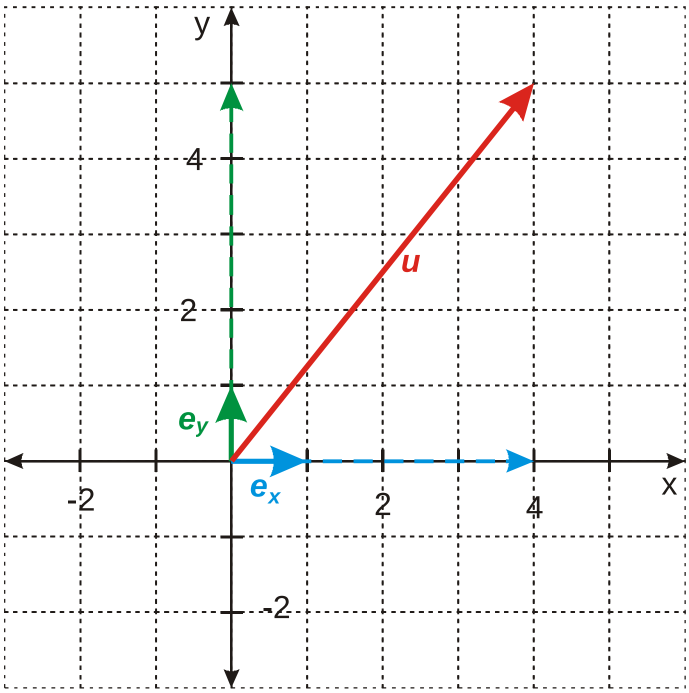
e) $S_{AB} - C = -\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}$

Máme dva vektory ***a***, ***b*** v rovině. Co získáme, když budeme vyrábět všechny možné lineární kombinace těchto vektorů?



Získáme všechny vektory v rovině.

Co vlastně znamená, že vektor $\boldsymbol{u}$ má souřadnice $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$?



Souřadnice vektoru jsou vlastně koeficienty lineární kombinace, kterou sestavíme tento vektor pomocí jednotkových vektorů ve směrech souřadných os.

Př. 5: Jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = (-1; 2; 4)$ a $\boldsymbol{b} = (2; 1; 1)$. Rozhodni, zda vektory:

a) $\boldsymbol{u} = (-5; 5; 11)$, b) $\boldsymbol{v} = (1; 3; 3)$

jsou lineární kombinací vektorů ***a***, ***b***. Pokud ano, urči koeficienty této lineární kombinace.

a) $\boldsymbol{u} = (-5; 5; 11)$

Pokud je vektor ***u*** lineární kombinací vektorů ***a***, ***b***, musí platit:

$\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}$ - protože vektory mají tři souřadnice, jde o soustavu tří rovnic (pro každou souřadnici jedna rovnice) pro dvě neznámé (hledané koeficienty *k*, *l*): $\begin{matrix} u_1 = ka_1 + lb_1 \\ u_2 = ka_2 + lb_2 \\ u_3 = ka_3 + lb_3 \end{matrix}$.

Dosadíme souřadnice: $\begin{matrix} -5 = k(-1) + l \cdot 2 \\ 5 = k \cdot 2 + l \cdot 1 \\ 11 = k \cdot 4 + l \cdot 1 \end{matrix}$

Odečteme druhou rovnici od třetí:

$11 - 5 = 4k - 2k + l - l$

$6 = 2k \Rightarrow k = 3$

Z druhé rovnice dopočítáme *l*: $5 = 3 \cdot 2 + l \Rightarrow l = -1$

Dosadíme do první rovnice a zkontrolujeme, zda vyjde:

$-5 = 3(-1) + (-1) \cdot 2 = -5$

Soustava má řešení $\Rightarrow$ vektor $\boldsymbol{u}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$**:** $\boldsymbol{u} = 3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$

b) $\boldsymbol{v} = (1;3;3)$

pokud je vektor $\boldsymbol{v}$ lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, musí platit:

$\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}$ - protože vektory mají tři souřadnice, jde o soustavu tří rovnic (pro každou souřadnici jedna) pro dvě neznámé (hledané koeficienty *k*, *l*): $\begin{matrix} v_1 = ka_1 + lb_1 \\ v_2 = ka_2 + lb_2 \\ v_3 = ka_3 + lb_3 \end{matrix}$

Dosadíme souřadnice: $\begin{matrix} 1 = k(-1) + l \cdot 2 \\ 3 = k \cdot 2 + l \cdot 1 \\ 3 = k \cdot 4 + l \cdot 1 \end{matrix}$

Odečteme druhou rovnici od třetí:

$3 - 3 = 4k - 2k + l - l$

$0 = 2k \Rightarrow k = 0$

Z druhé rovnice dopočítáme *l*: $3 = 0 \cdot 2 + l \Rightarrow l = 3$

Dosadíme do první rovnice a zkontrolujeme, zda vyjde:

$1 = 0(-1) + 3 \cdot 2 = 6$ - rovnost neplatí $\Rightarrow$ soustava nemá řešení $\Rightarrow$ vektor $\boldsymbol{v}$ není lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad stojí a padá s tím, jakou představu mají žáci o řešení soustav rovnic (jde o obecné představy o možnostech volby díky proměnným a jejich omezováním podmínkami v rovnicích). Pokud vnímají soustavy mechanicky, s velkou pravděpodobností nebudou kontrolovat první rovnici dosazením a v obou případech jim vyjde, že vektor $\boldsymbol{v}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

Teď můžeme určit vektor, který bude mít určitý směr a potřebnou velikost.

Př. 6: Najdi vektor $\boldsymbol{v}$, který je rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{u} = (3;4)$ a jehož velikost je 1.

Dvě možnosti jak příklad vyřešit.

1. Sestavení podmínek pro souřadnice vektoru $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2)$

Vektor $\boldsymbol{v}$ je rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{u}$ $\Rightarrow$ vektor $\boldsymbol{v}$ je násobek vektoru $\boldsymbol{u}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{u}$
v souřadnicích: $v_1 = ku_1$, $v_2 = ku_2$.
Zatím dvě rovnice pro tři neznámé $\Rightarrow$ potřebujeme ještě jednu rovnici.
Podmínka: velikost $\boldsymbol{v}$ je 1 $\Rightarrow$ $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$.
Máme tři rovnice pro tři neznámé. Vyřešit by to šlo, ale není to moc komfortní.

2. Využití velikosti vektoru *u*.

Spočítáme velikost vektoru ***u***: $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Vektor $\boldsymbol{v}$ má mít velikost 1 $\Rightarrow$ musí být 5krát menší $\Rightarrow$ platí: $\boldsymbol{v} = k \cdot \boldsymbol{u}$, kde $k \in \left\{-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right\}$.

$\boldsymbol{v}_1 = -\frac{1}{5}\boldsymbol{u} = -\frac{1}{5}(3;4) = \left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ $\quad$ $\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{5}\boldsymbol{u} = \frac{1}{5}(3;4) = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$

Pedagogická poznámka: Slušný chaos můžete ve třídě vyvolat, pokud ukážete na tabuli, že vektor $\boldsymbol{v}$ má být pětkrát menší, existují tedy dvě řešení pro $k \in \left\{-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right\}$ a napíšete $\boldsymbol{v}_1 =$ a $\boldsymbol{v}_2 =$. Někteří studenti se přestanou orientovat, že nejde o složky, ale o celé vektory a totálně zpanikaří.

Př. 7: Najdi vektor ***w***, který je rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{u} = (3;4)$ a jehož velikost je 10.

Spočítáme velikost vektoru ***u***: $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
Vektor ***w*** má mít velikost 10 $\Rightarrow$ musí být 2krát větší.
$\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{u} = 2(3;4) = (6;8)$

Př. 8: Petáková:
strana 99/cvičení 5
strana 100/cvičení 8
strana 100/cvičení 9
strana 100/cvičení 10

Shrnutí: Při násobení vektoru číslem se mění jeho velikost $\Rightarrow$ navzájem rovnoběžné vektory jsou svými násobky.