7.2.4 Násobení vektoru číslem II

Předpoklady: 7203

Př. 1: Jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (1;-3;1)$ a $\boldsymbol{v} = (2;2;-1)$. Urči vektor $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v}$.

$\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v} = 2(1;-3;1) - 3(2;2;-1) = ([2\cdot 1 - 3\cdot 2];[2\cdot(-3) - 3\cdot 2];[2\cdot 1 - 3\cdot(-1)]) =$
$= (-4;-12;5)$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je možné řešit i postupně určením násobků a pak jejich součtu.

Vektor $\boldsymbol{w}$ jsme získali jako součet násobků vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, říkáme, že vektor $\boldsymbol{w}$ je **lineární kombinací** vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.

Jsou dány vektory $\boldsymbol{u}_1;\boldsymbol{u}_2;...;\boldsymbol{u}_n$ a reálná čísla $a_1;a_2;...;a_n$. Vektor $\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + .. + a_n\boldsymbol{u}_n$ se nazývá lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{u}_1;\boldsymbol{u}_2;...;\boldsymbol{u}_n$. Reálná čísla $a_1;a_2;...;a_n$ nazýváme koeficienty této lineární kombinace.

Př. 2: V příkladu 4 byl hledaný vektor $\boldsymbol{w}$ jako lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ určen vztahem $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v}$. Urči koeficienty této lineární kombinace a číslo *n*.

$\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v}$ $\Rightarrow$ vektor $\boldsymbol{w}$ je lineární kombinací dvou vektorů $\Rightarrow$ $n = 2$

srovnáme vztahy: $\begin{array}{c} \boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 \end{array}$ $\Rightarrow$ $a_1 = 2$, $a_2 = -3$.

Pedagogická poznámka: Jako vždy v podobných příkladech i tady mají studenti největší problémy s určením čísla *n*.

Př. 3: Jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = (-1;2;4)$ a $\boldsymbol{b} = (2;1;1)$. Rozhodni, zda vektory:

a) $\boldsymbol{u} = (-5;5;11)$, b) $\boldsymbol{v} = (1;3;3)$

jsou lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Pokud ano, urči koeficienty této lineární kombinace.

a) $\boldsymbol{u} = (-5;5;11)$

Pokud je vektor $\boldsymbol{u}$ lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ musí platit:

$\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}$ - protože vektory mají tři souřadnice, jde o soustavu tří rovnic (pro každou souřadnici jedna rovnice) pro dvě neznámé (hledané koeficienty *k*, *l*): $\begin{array}{l} u_1 = ka_1 + lb_1 \\ u_2 = ka_2 + lb_2 \\ u_3 = ka_3 + lb_3 \end{array}$.

Dosadíme souřadnice: $\begin{array}{l} -5 = k(-1) + l\cdot 2 \\ 5 = k\cdot 2 + l\cdot 1 \\ 11 = k\cdot 4 + l\cdot 1 \end{array}$

Odečteme druhou rovnici od třetí:
$11-5=4k-2k+l-l$
$6=2k \Rightarrow k=3$
Z druhé rovnice dopočítáme l: $5=3\cdot 2+l \Rightarrow l=-1$
Dosadíme do první rovnice a zkontrolujeme zda vyjde:
$-5=3(-1)+(-1)\cdot 2=-5$
Soustava má řešení $\Rightarrow$ vektor $\boldsymbol{u}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$: $\boldsymbol{u}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

b) $\boldsymbol{v}=(1;3;3)$

pokud je vektor $\boldsymbol{v}$ lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ musí platit:
$\boldsymbol{v}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}$ - protože vektory mají tři souřadnice, jde o soustavu tří rovnic (pro každou souřadnici jedna) pro dvě neznámé (hledané koeficienty k, l):

$$v_1=ka_1+lb_1$$
$$v_2=ka_2+lb_2$$
$$v_3=ka_3+lb_3$$

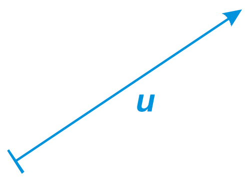
Dosadíme souřadnice:

$$1=k(-1)+l\cdot 2$$
$$3=k\cdot 2+l\cdot 1$$
$$3=k\cdot 4+l\cdot 1$$

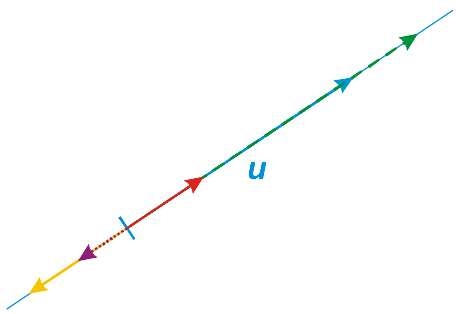
Odečteme druhou rovnici od třetí:
$3-3=4k-2k+l-l$
$0=2k \Rightarrow k=0$
Z druhé rovnice dopočítáme l: $3=0\cdot 2+l \Rightarrow l=3$
Dosadíme do první rovnice a zkontrolujeme zda vyjde:
$1=0(-1)+3\cdot 2=6$ - rovnost neplatí $\Rightarrow$ soustava nemá řešení $\Rightarrow$ vektor $\boldsymbol{v}$ není lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad stojí a padá s tím, jakou představu mají žáci o řešení soustav rovnic (jde o obecné představy o možnostech volby díky proměnným a jejich omezováním podmínkami v rovnicích). Pokud vnímají soustavy mechanicky, s velkou pravděpodobností nebudou kontrolovat první rovnici dosazením a v obou případech jim vyjde, že vektor $\boldsymbol{v}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

Co získáme, když budeme dělat násobky vektoru $\boldsymbol{u}$ (fakticky lineární kombinace z jednoho vektoru)?



$\Rightarrow$



Získáme násobky tohoto vektoru. Všechny tyto vektory leží na stejné přímce (mají stejný nebo opačný směr). $\Rightarrow$

Dva vektory leží na stejné přímce (jsou rovnoběžné), právě když je jeden násobkem druhého.

(to není žádná matematicky významná věta, ale budeme ji často používat)

Teď můžeme určit vektor, který bude mít určitý směr a potřebnou velikost.

Př. 4: Najdi vektor ***v***, který je rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{u} = (3;4)$ a jehož velikost je 1.

Dvě možnosti jak příklad vyřešit.

1. Sestavení podmínek pro souřadnice vektoru $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2)$

Vektor ***v*** je rovnoběžný s vektorem ***u*** $\Rightarrow$ vektor ***v*** je násobek vektoru ***u*** $\Rightarrow$ $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{u}$

v souřadnicích: $v_1 = ku_1$, $v_2 = ku_2$.

Zatím dvě rovnice pro tři neznámé $\Rightarrow$ potřebujeme ještě jednu rovnici.

Podmínka: velikost ***v*** je 1 $\Rightarrow$ $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$.

Máme tři rovnice pro tři neznámé. Vyřešit by to šlo, ale není to moc komfortní.

2. Využití velikosti vektoru *u*.

Spočítáme velikost vektoru ***u*:** $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Vektor ***v*** má mít velikost 1 $\Rightarrow$ musí být 5krát menší $\Rightarrow$ platí: $\boldsymbol{v} = k \cdot \boldsymbol{u}$, kde $k \in \left\{-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right\}$.

$\boldsymbol{v}_1 = -\frac{1}{5}\boldsymbol{u} = -\frac{1}{5}(3;4) = \left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ $\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{5}\boldsymbol{u} = \frac{1}{5}(3;4) = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$

Pedagogická poznámka: Slušný chaos můžete ve třídě vyvolat pokud ukážete na tabuli, že vektor ***v*** má být pětkrát menší, existují tedy dvě řešení pro $k \in \left\{-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right\}$ a napíšete $\boldsymbol{v}_1 =$ a $\boldsymbol{v}_2 =$. Někteří studenti se přestanou orientovat, že nejde o složky, ale o celé vektory a totálně zpanikaří.

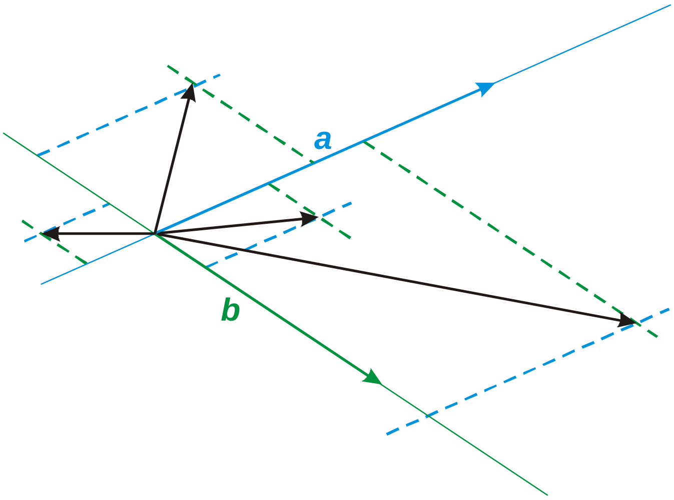
Př. 5: Najdi vektor ***w***, který je rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{u} = (3;4)$ a jehož velikost je 10.

Spočítáme velikost vektoru ***u*:** $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Vektor ***w*** má mít velikost 10 $\Rightarrow$ musí být 2krát větší.

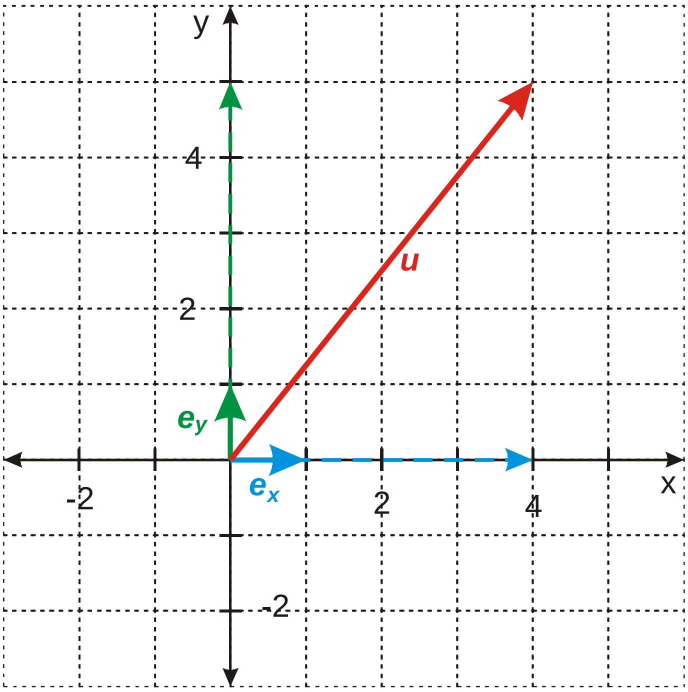
$\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{u} = 2(3;4) = (6;8)$

Máme dva vektory ***a***, ***b*** v rovině. Co získáme, když budeme vyrábět všechny možné lineární kombinace těchto vektorů?



Získáme všechny vektory v rovině.

Co vlastně znamená, že vektor ***u*** má souřadnice $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$?



Souřadnice vektoru jsou vlastně koeficienty lineární kombinace, kterou sestavíme tento vektor pomocí jednotkových vektorů ve směrech souřadných os.

Př. 6: Petáková:
strana 99/cvičení 5
strana 100/cvičení 8
strana 100/cvičení 9
strana 100/cvičení 10

Shrnutí: Při násobení vektoru číslem se mění jeho velikost $\Rightarrow$ navzájem rovnoběžné vektory jsou svými násobky.