

7.2.6 Počítání s vektory

Předpoklady: 7204, 7205

Pedagogická poznámka: V této hodině se neprobírá nová látka. Jde o procvičení a některé aplikace předchozích hodin. Rozhodně doporučuji nevynechávat. Příklady v této hodině vyžadují modré rámečky z předchozích hodin. Pokud s nimi studenti mají problémy, je třeba nasadit nějakou formu donucení, nebo budou ve škole až do konce analytické geometrie zbyteční.

Pedagogická poznámka: Na řešení prvního příkladu většina žáků samostatně nepřijde. Nejdříve kreslím na tabuli schematický náčrtek situací, kdy body na přímce leží a i kdy na přímce neleží, pak je vyzývám, aby si v sešitě našli, kdy jsme se zabývali tím, kdy vektory leží nebo neleží na jedné přímce a teprve poté jim to prozradím.

Př. 1: Jsou dány body $A[-1;3]$, $B[2;1]$ a $C[5;-2]$. Rozhodni, zda tyto tři body leží v přímce.

Pokud body leží v přímce, tak platí: $(C - A) = k(B - A)$.

$$(C - A) = (5 - (-1); -2 - 3) = (6; -5) \quad (B - A) = (2 - (-1); 1 - 3) = (3; -2)$$

Dosadíme: $(6; -5) = k(3; -2) \Rightarrow$

- $6 = 3 \cdot k \Rightarrow k = 2,$
- $-5 = k \cdot (-2) \Rightarrow k = \frac{5}{2},$

\Rightarrow pro každou souřadnici získáváme jiné $k \Rightarrow$ vektor $(C - A)$ není násobkem vektoru $(B - A) \Rightarrow$ body A, B a C neleží v přímce.

Pedagogická poznámka: Naprostá většina žáků ihned „vidí“, že vektory nejsou svými násobky, rozhodně je zbytečné, aby situaci rozepisovali tak, jak je uvedeno v příkladu. U těch ostatních je třeba se snažit, aby to „viděli“ také, protože manuální nácvik toho, že jeden vektor je násobkem druhého je velmi obtížný a vede k nepřijemné nepružnosti při řešení mnoha jinak jednoduchých situací.

Př. 2: Jsou dány body $K[-2;0]$, $L[4;-3]$ a $M[-6;2]$. Rozhodni, zda tyto tři body leží v přímce.

Pokud body leží v přímce, tak platí: $(L - K) = k(M - K)$.

$$(L - K) = (4 - (-2); -3 - 0) = (6; -3) \quad (M - K) = (-6 - (-2); 2 - 0) = (-4; 2)$$

Dosadíme: $(6; -3) = k(-4; 2) \Rightarrow$

- $6 = (-4) \cdot k \Rightarrow k = -\frac{3}{2},$
- $-3 = k \cdot 2 \Rightarrow k = -\frac{3}{2},$

\Rightarrow pro obě souřadnice jsme získali stejné $k \Rightarrow$ vektor $(M - K)$ je násobkem vektoru $(L - K) \Rightarrow$ body K, L a M leží v přímce.

Př. 3: Jsou dány body $A[-1;3]$, $B[2;1]$. Urči hodnotu parametru x tak, aby bod $D[x;2]$ ležel na přímce AB .

Pokud body leží v přímce, tak platí: $(D - A) = k(B - A)$.

$$(D - A) = (x - (-1); 2 - 3) = (x + 1; -1) \quad (B - A) = (2 - (-1); 1 - 3) = (3; -2)$$

$$\text{Dosadíme: } (x + 1; -1) = k(3; -2), \\ x + 1 = 3 \cdot k$$

$$\Rightarrow \text{soustava rovnic: } -1 = k \cdot (-2) \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\text{Dosadíme do první rovnice: } x + 1 = 3 \cdot k = 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Bod D musí mít souřadnice $D\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Pedagogická poznámka: Z hlediska budoucnosti je důležité, aby žáci pochopili, že zápis $(x + 1; -1) = k(3; -2)$ představuje dvě obyčejné lineární rovnice.

Př. 4: Jsou dány body $A[-9;1]$, $B[9;-5]$ a $C[6;7]$.

- Dokaž, že body A, B a C tvoří trojúhelník.
- Urči souřadnice středů stran trojúhelníka ABC .
- Urči délky stran trojúhelníka ABC .
- Urči souřadnice těžiště trojúhelníka ABC .

a) Dokaž, že body A, B a C tvoří trojúhelník.

Body A, B, C tvoří trojúhelník, pokud neleží na jedné přímce \Rightarrow pokud vektory $B - A$ a $C - A$ nejsou rovnoběžné.

$$B - A = (18; -6) \quad C - A = (15; 6)$$

Pro rovnoběžné vektory platí, že jeden je násobek druhého:

$$(18; -6) = k(15; 6) \Rightarrow k = \frac{18}{15} = \frac{6}{5} \quad k = \frac{-6}{6} = -1$$

Vektory nejsou rovnoběžné \Rightarrow body A, B a C tvoří trojúhelník.

b) Urči souřadnice středů stran trojúhelníka ABC .

$$S_{AB} = \frac{A+B}{2} = \left[\frac{-9+9}{2}; \frac{1+(-5)}{2} \right] = [0; -2], \quad S_{AC} = \frac{A+C}{2} = \left[\frac{-9+6}{2}; \frac{1+7}{2} \right] = \left[-\frac{3}{2}; 4 \right]$$

$$S_{BC} = \frac{B+C}{2} = \left[\frac{9+6}{2}; \frac{-5+7}{2} \right] = \left[\frac{15}{2}; 1 \right]$$

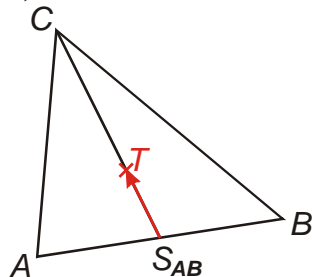
c) Urči délky stran trojúhelníka ABC .

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \sqrt{(9 - [-9])^2 + (-5 - 1)^2} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10} \doteq 18,97$$

$$|AC| = \sqrt{(c_1 - a_1)^2 + (c_2 - a_2)^2} = \sqrt{(6 - [-9])^2 + (7 - 1)^2} = \sqrt{261} = 3\sqrt{29} \doteq 16,16$$

$$|BC| = \sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2} = \sqrt{(6 - 9)^2 + (7 - [-5])^2} = \sqrt{153} = 3\sqrt{17} \doteq 12,37$$

d) Urči souřadnice těžiště trojúhelníka ABC.



Těžiště trojúhelníku se nachází v jedné třetině těžnice \Rightarrow pro

bod T platí: $T = S_{AB} + \frac{1}{3}(C - S_{AB})$.

Podobně: $T = S_{AC} + \frac{1}{3}(B - S_{AC})$ nebo $T = S_{BC} + \frac{1}{3}(A - S_{BC})$.

Spočítáme bod T jako $T = S_{AB} + \frac{1}{3}(C - S_{AB})$:

$$(C - S_{AB}) = (6; 9) \qquad T = S_{AB} + \frac{1}{3}(C - S_{AB}) = [0; -2] + \frac{1}{3}(6; 9) = [2; 1]$$

Kontrola:

$$(B - S_{AC}) = \left(\frac{21}{2}; -9\right) \qquad T = S_{AC} + \frac{1}{3}(B - S_{AC}) = \left[-\frac{3}{2}; 4\right] + \frac{1}{3}\left(\frac{21}{2}; -9\right) = [2; 1]$$

Pedagogická poznámka: Pomalejší žáci nepočítají všechny strany a všechny délky, stačí, když vypočtou jednu. Doporučuji kontrolovat po jednotlivých bodech a pomalejší posílat dál.

Př. 5: (BONUS) Odvoď obecný vztah pro výpočet těžiště trojúhelníku ze souřadnic jeho vrcholů $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$, $C[c_1; c_2]$.

Zopakujeme předchozí postup, tentokrát s písmeny místo čísel.

Těžiště trojúhelníku se nachází v jedné třetině těžnice \Rightarrow pro bod T platí:

$$T = S_{AB} + \frac{1}{3}(C - S_{AB})$$

$$S_{AB} = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right]$$

$$(C - S_{AB}) = [c_1; c_2] - \left[\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right] = \left[\frac{2c_1 - a_1 - b_1}{2}; \frac{2c_2 - a_2 - b_2}{2}\right]$$

$$T = S_{AB} + \frac{1}{3}(C - S_{AB}) = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right] + \frac{1}{3}\left[\frac{2c_1 - a_1 - b_1}{2}; \frac{2c_2 - a_2 - b_2}{2}\right] =$$

$$\left[\frac{a_1 + b_1}{2} + \frac{2c_1 - a_1 - b_1}{6}; \frac{a_2 + b_2}{2} + \frac{2c_2 - a_2 - b_2}{6}\right] =$$

$$= \left[\frac{3a_1 + 3b_1 + 2c_1 - a_1 - b_1}{6}; \frac{3a_2 + 3b_2 + 2c_2 - a_2 - b_2}{6}\right] =$$

$$\left[\frac{2a_1 + 2b_1 + 2c_1}{6}; \frac{2a_2 + 2b_2 + 2c_2}{6}\right] = \left[\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right]$$

$$T = \left[\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} \right] - \text{vztah nezávisí na vrcholu, ze kterého vedeme těžnici} \Rightarrow$$

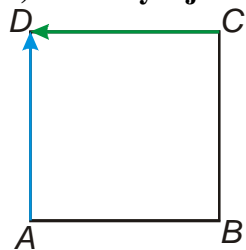
Dokázali jsme, že těžnice trojúhelníku se protínají v jednom bodě.

Často se používá symbolický zápis: $T = \frac{1}{3}(A + B + C)$.

Př. 6: Jsou dány body $A[2; -2; 1]$, $B[5; 2; 1]$ a $C[1; 5; 1]$.

- Urči zbývající vrchol čtverce $ABCD$.
- Urči délku strany čtverce $ABCD$.
- Urči vrcholy krychle $ABCDEFGH$. Vektor $E - A$ má směr shodný s osou z .
- Urči souřadnice středu krychle a středu stěny $BCFG$.
- Označíme vektory $u = B - A$, $v = D - A$ a $w = E - A$. Vyjádři pomocí těchto vektorů vektory $S_{AB} - C$, $S_{BC} - S_{EF}$.

a) Urči zbývající vrchol čtverce $ABCD$.



Z obrázku je zřejmé, že platí:

$$D = C + (A - B) = A + (C - B),$$

$$D = C + (A - B) = [1; 5; 1] + (-3; -4; 0) = [-2; 1; 1].$$

Kontrola:

$$D = A + (C - B) = [2; -2; 1] + (-4; 3; 0) = [-2; 1; 1].$$

b) Urči délku strany čtverce $ABCD$.

$$a = |AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} = \sqrt{(5 - 2)^2 + (2 - [-2])^2 + (1 - 1)^2} = 5$$

c) Urči vrcholy krychle $ABCDEFGH$. Vektor $E - A$ má směr shodný s osou z .
Směr osy z : $(0; 0; 1)$.

Vektor $E - A$ musí mít velikost 5 $\Rightarrow E - A = (0; 0; 5)$.

Dopočteme vrcholy:

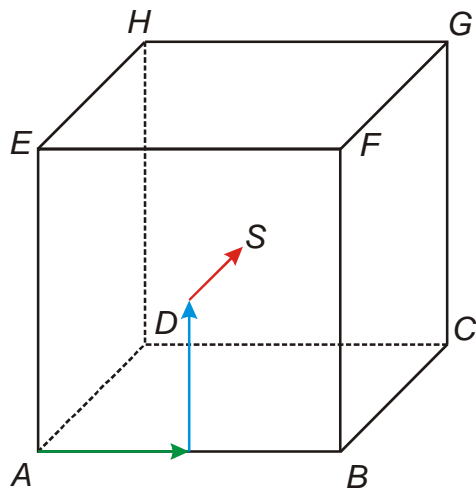
$$E = A + (E - A) = [2; -2; 1] + (0; 0; 5) = [2; -2; 6],$$

$$F = B + (E - A) = [5; 2; 1] + (0; 0; 5) = [5; 2; 6],$$

$$G = C + (E - A) = [1; 5; 1] + (0; 0; 5) = [1; 5; 6],$$

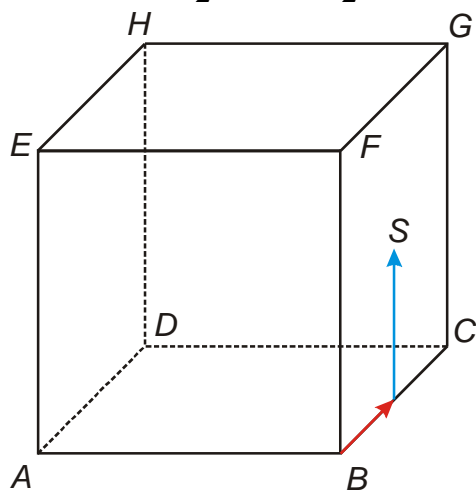
$$H = D + (E - A) = [-2; 1; 1] + (0; 0; 5) = [-2; 1; 6].$$

d) Urči souřadnice středu krychle a středu stěny $BCFG$.



Z obrázku je vidět, že platí: $S = A + \frac{1}{2}(B - A) + \frac{1}{2}(E - A) + \frac{1}{2}(C - B)$.

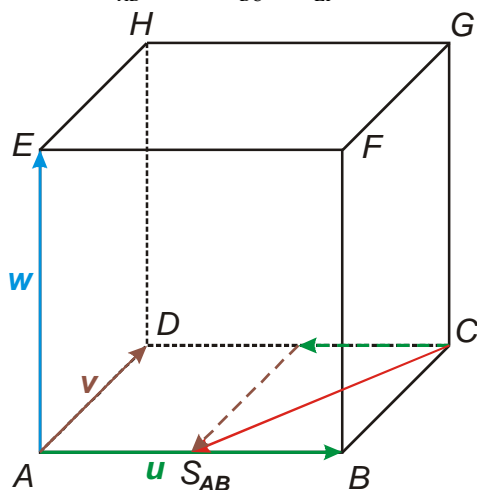
$$S = [2; -2; 1] + \frac{1}{2}(3; 4; 0) + \frac{1}{2}(0; 0; 5) + \frac{1}{2}(-4; 3; 0) = [1, 5; 1; 5; 3, 5]$$



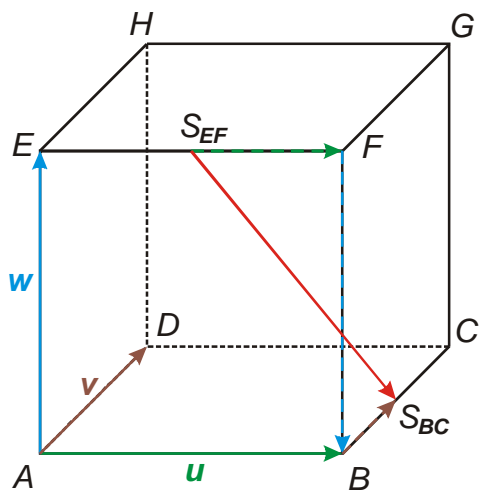
Z obrázku je vidět, že platí: $S = B + \frac{1}{2}(C - B) + \frac{1}{2}(E - A)$.

$$S = [5; 2; 1] + \frac{1}{2}(-4; 3; 0) + \frac{1}{2}(0; 0; 5) = [3; 3, 5; 3, 5]$$

e) Označme vektory $u = B - A$, $v = D - A$ a $w = E - A$. Vyjádři pomocí těchto vektorů vektory $S_{AB} - C$, $S_{BC} - S_{EF}$.



Z obrázku je vidět, že platí: $S_{AB} - C = -\frac{1}{2}u - v$



Z obrázku je vidět, že platí:

$$S_{BC} - S_{EF} = \frac{1}{2}u - w + \frac{1}{2}v$$

- Př. 7:** Petáková:
 strana 100/cvičení 12
 strana 100/cvičení 14
 strana 101/cvičení 22
 strana 101/cvičení 23

Shrnutí: