## 7.2.6 Počítání s vektory

**Předpoklady:** 7204, 7205

**Pedagogická poznámka:** V této hodině se neprobírá nová látka. Jde o procvičení a některé aplikace předchozích hodin. Rozhodně doporučuji nevynechávat. Příklady v této hodině vyžadují modré rámečky z předchozích hodin. Pokud s nimi studenti mají problémy, je třeba nasadit nějakou formu donucení nebo budou ve škole až do konce analytické geometrie zbyteční.

**Pedagogická poznámka:** Na řešení prvního příkladu většina žáků samostatně nepřijde. Nejdříve kreslím na tabuli schématický náčrtek situací, kdy body na přímce leží a i kdy na přímce neleží, pak je vyzývám, aby si v sešitě našli, kdy jsme se zabývali tím, že kdy vektory leží nebo neleží na jedné přímce a teprve poté jim to prozradím.

**Př. 1:** Jsou dány body $A[-1;3]$, $B[2;1]$ a $C[5;-2]$. Rozhodni, zda tyto tři body leží v přímce.

Pokud body leží v přímce tak platí: $(C-A)=k(B-A)$.

$(C-A)=(5-(-1);-2-3)=(6;-5)$ $\qquad$ $(B-A)=(2-(-1);1-3)=(3;-2)$

Dosadíme: $(6;-5)=k(3;-2)$ $\quad\Rightarrow$

- $6=3\cdot k \Rightarrow k=2$,
- $-5=k\cdot(-2)\Rightarrow k=\frac{5}{2}$,

$\Rightarrow$ pro každou souřadnici získáváme jiné $k$ $\Rightarrow$ vektor $(C-A)$ není násobkem vektoru $(B-A)$ $\Rightarrow$ body *A*, *B* a *C* neleží v přímce.

**Pedagogická poznámka:** Naprostá většina žáků ihned „vidí“, že vektory nejsou svými násobky, rozhodně je zbytečné, aby situaci rozepisovali tak, jak je uvedeno v příkladu. U těch ostatních je třeba se snažit, aby to „viděli“ také, protože manuální nácvik toho, že jeden vektor je násobkem druhého je velmi obtížný a vede k nepříjemné nepružnosti při řešení mnoha jinak jednoduchých situací.

**Př. 2:** Jsou dány body $K[-2;0]$, $L[4;-3]$ a $M[-6;2]$. Rozhodni, zda tyto tři body leží v přímce.

Pokud body leží v přímce tak platí: $(M-K)=k(L-K)$.

$(L-K)=(4-(-2);-3-0)=(6;-3)$ $\qquad$ $(M-K)=(-6-(-2);2-0)=(-4;2)$

Dosadíme: $(6;-3)=k(-4;2)$ $\quad\Rightarrow$

- $6=(-4)\cdot k\Rightarrow k=-\frac{3}{2}$,

- $-3 = k \cdot 2 \Rightarrow k = -\frac{3}{2}$,

$\Rightarrow$ pro obě souřadnice jsme získali stejné $k$ $\Rightarrow$ vektor $(M-K)$ je násobkem vektoru $(L-K)$ $\Rightarrow$ body *K*, *L* a *M* leží v přímce.

**Př. 3:** Jsou dány body $A[-1;3]$, $B[2;1]$. Urči hodnotu parametru *x* tak, aby bod $D[x;2]$ ležel na přímce *AB*.

Pokud body leží v přímce, tak platí: $(D-A) = k(B-A)$.

$(D-A) = (x-(-1);2-3) = (x+1;-1)$ $\qquad$ $(B-A) = (2-(-1);1-3) = (3;-2)$

Dosadíme: $(x+1;-1) = k(3;-2)$,

$\Rightarrow$ soustava rovnic:
$$x+1 = 3\cdot k$$
$$-1 = k\cdot(-2) \Rightarrow k = \frac{1}{2}\cdot$$

Dosadíme do první rovnice: $x+1 = 3\cdot k = 3\cdot\frac{1}{2}$.

$x+1 = \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2}$

Bod *D* musí mít souřadnice $D\left[\frac{1}{2};2\right]$.

**Pedagogická poznámka:** Z hlediska budoucnosti je důležité, aby žáci pochopili, že zápis $(x+1;-1) = k(3;-2)$ představuje dvě obyčejné lineární rovnice.

**Př. 4:** Jsou dány body $A[-9;1]$, $B[9;-5]$ a $C[6;7]$.

a) Dokaž, že body *A*, *B* a *C* tvoří trojúhelník.
b) Urči souřadnice středů stran trojúhelníka *ABC*.
c) Urči délky stran trojúhelníka *ABC*.
d) Urči souřadnice těžiště trojúhelníka *ABC*.

**a) Dokaž, že body *A*, *B* a *C* tvoří trojúhelník.**

Body *A*, *B*, *C* tvoří trojúhelník, pokud neleží na jedné přímce $\Rightarrow$ pokud vektory $B-A$ a $C-A$ nejsou rovnoběžné.

$B-A = (18;-6)$ $\qquad$ $C-A = (15;6)$

Pro rovnoběžné vektory platí, že jeden je násobek druhého:

$(18;-6) = k(15;6) \;\Rightarrow\; k = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}$ $\qquad$ $k = \frac{-6}{6} = -1$

Vektory nejsou rovnoběžné $\Rightarrow$ body *A*, *B* a *C* tvoří trojúhelník.

**b) Urči souřadnice středů stran trojúhelníka *ABC*.**

$S_{AB} = \frac{A+B}{2} = \left[\frac{-9+9}{2};\frac{1+(-5)}{2}\right] = [0;-2]$, $\quad S_{AC} = \frac{A+C}{2} = \left[\frac{-9+6}{2};\frac{1+7}{2}\right] = \left[-\frac{3}{2};4\right]$

$S_{BC} = \frac{B+C}{2} = \left[\frac{9+6}{2};\frac{-5+7}{2}\right] = \left[\frac{15}{2};1\right]$

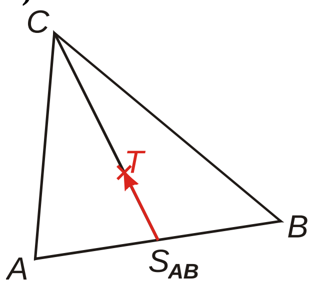
**c) Urči délky stran trojúhelníka *ABC*.**

$$|AB|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}=\sqrt{(9-[-9])^2+(-5-1)^2}=\sqrt{360}=6\sqrt{10}\doteq 18,97$$

$$|AC|=\sqrt{(c_1-a_1)^2+(c_2-a_2)^2}=\sqrt{(6-[-9])^2+(7-1)^2}=\sqrt{261}=3\sqrt{29}\doteq 16,16$$

$$|BC|=\sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2}=\sqrt{(6-9)^2+(7-[-5])^2}=\sqrt{153}=3\sqrt{17}\doteq 12,37$$

**d) Urči souřadnice těžiště trojúhelníka *ABC*.**




Těžiště trojúhelníku se nachází v jedné třetině těžnice $\Rightarrow$ pro bod *T* platí: $T=S_{AB}+\frac{1}{3}(C-S_{AB})$.

Podobně: $T=S_{AC}+\frac{1}{3}(B-S_{AC})$ nebo $T=S_{BC}+\frac{1}{3}(A-S_{BC})$.

Spočítáme bod $T$ jako $T=S_{AB}+\frac{1}{3}(C-S_{AB})$:

$(C-S_{AB})=(6;9)$ $\qquad$ $T=S_{AB}+\frac{1}{3}(C-S_{AB})=[0;-2]+\frac{1}{3}(6;9)=[2;1]$

Kontrola:

$(B-S_{AC})=\left(\frac{21}{2};-9\right)$ $\qquad$ $T=S_{AC}+\frac{1}{3}(B-S_{AC})=\left[-\frac{3}{2};4\right]+\frac{1}{3}\left(\frac{21}{2};-9\right)=[2;1]$

**Pedagogická poznámka:** Pomalejší žáci nepočítají všechny strany a všechny délky, stačí když vypočtou jednu. Doporučuji kontrolovat po jednotlivých bodech a pomalejší posílat dál.

**Př. 5:** **(BONUS)** Odvoď obecný vztah pro výpočet těžiště trojúhelníku ze souřadnic jeho vrcholů $A[a_1;a_2]$, $B[b_1;b_2]$, $C[c_1;c_2]$.

Zopakujeme předchozí postup, tentokrát s písmeny místo čísel.
Těžiště trojúhelníku se nachází v jedné třetině těžnice $\Rightarrow$ pro bod *T* platí:

$$T=S_{AB}+\frac{1}{3}(C-S_{AB})$$

$$S_{AB}=\left[\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2}\right]$$

$$(C-S_{AB})=[c_1;c_2]-\left[\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2}\right]=\left(\frac{2c_1-a_1-b_1}{2};\frac{2c_2-a_2-b_2}{2}\right)$$

$$T = S_{AB} + \frac{1}{3}(C - S_{AB}) = \left[\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}\right] + \frac{1}{3}\left(\frac{2c_1-a_1-b_1}{2}; \frac{2c_2-a_2-b_2}{2}\right) =$$

$$\left[\frac{a_1+b_1}{2} + \frac{2c_1-a_1-b_1}{6}; \frac{a_2+b_2}{2} + \frac{2c_2-a_2-b_2}{6}\right] =$$

$$= \left[\frac{3a_1+3b_1+2c_1-a_1-b_1}{6}; \frac{3a_2+3b_2+2c_2-a_2-b_2}{6}\right] =$$

$$\left[\frac{2a_1+2b_1+2c_1}{6}; \frac{2a_2+2b_2+2c_2}{6}\right] = \left[\frac{a_1+b_1+c_1}{3}; \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right]$$

$T = \left[\frac{a_1+b_1+c_1}{3}; \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right]$ - vztah nezávisí na vrcholu, ze kterého vedeme těžnici $\Rightarrow$

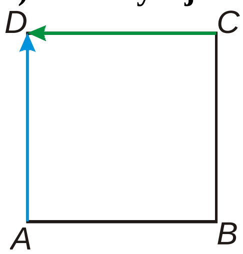
Dokázali jsme, že těžnice trojúhelníku se protínají v jednom bodě.

Často se používá symbolický zápis: $T = \frac{1}{3}(A+B+C)$.

**Př. 6:** Jsou dány body bodu $A[2;-2;1]$, $B[5;2;1]$ a $C[1;5;1]$.

a) Urči zbývající vrchol čtverce *ABCD*.
b) Urči délku strany čtverce *ABCD*.
c) Urči vrcholy krychle *ABCDEFGH*. Vektor $E-A$ má směr shodný s osou *z*.
d) Urči souřadnice středu krychle a středu stěny *BCFG*.
e) Označíme vektory $\boldsymbol{u} = B - A$, $\boldsymbol{v} = D - A$ a $\boldsymbol{w} = E - A$. Vyjádři pomocí těchto vektorů vektory $S_{AB} - C$, $S_{BC} - S_{EF}$.

**a) Urči zbývající vrchol čtverce *ABCD*.**




Z obrázku je zřejmé, že platí:

$D = C + (A - B) = A + (C - B)$,

$D = C + (A - B) = [1;5;1] + (-3;-4;0) = [-2;1;1]$.

Kontrola:

$D = A + (C - B) = [2;-2;1] + (-4;3;0) = [-2;1;1]$.

**b) Urči délku strany čtverce *ABCD*.**

$$a = |AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2} = \sqrt{(5-2)^2 + (2-[-2])^2 + (1-1)^2} = 5$$

**c) Urči vrcholy krychle *ABCDEFGH*. Vektor $E - A$ má směr shodný s osou *z*.**

Směr osy *z*: $(0;0;1)$.

Vektor $E - A$ musí mít velikost 5 $\Rightarrow$ $E - A = (0;0;5)$.

Dopočteme vrcholy:

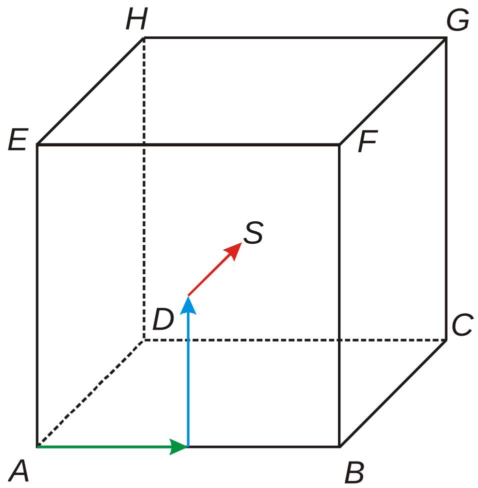
$E = A + (E - A) = [2;-2;1] + (0;0;5) = [2;-2;6]$,

$F = B + (E - A) = [5;2;1] + (0;0;5) = [5;2;6]$,

$G = C + (E - A) = [1;5;1] + (0;0;5) = [1;5;6]$,

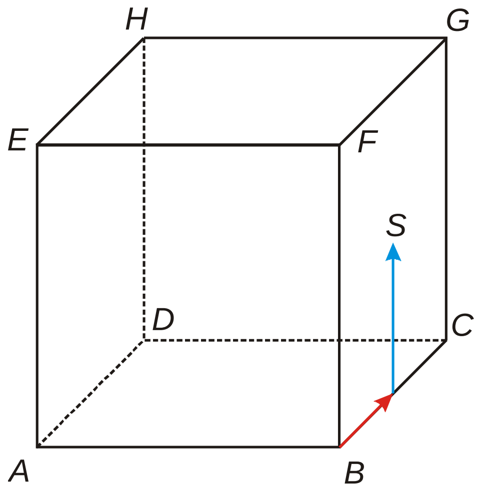
$H = D + (E - A) = [-2;1;1] + (0;0;5) = [-2;1;6]$.

**d) Urči souřadnice středu krychle a středu stěny *BCFG*.**




Z obrázku je vidět, že platí: $S = A + \frac{1}{2}(B - A) + \frac{1}{2}(E - A) + \frac{1}{2}(C - B)$.

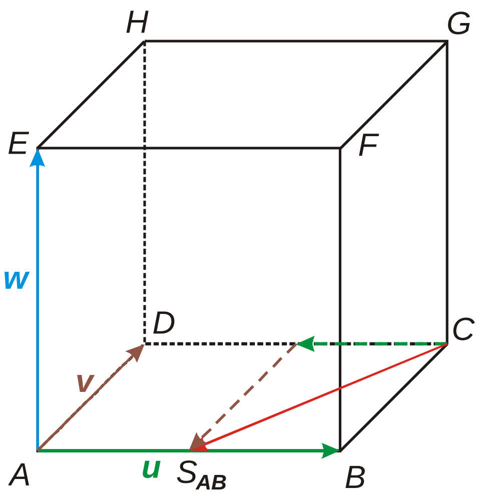
$S = [2;-2;1] + \frac{1}{2}(3;4;0) + \frac{1}{2}(0;0;5) + \frac{1}{2}(-4;3;0) = [1,5;1;5;3,5]$



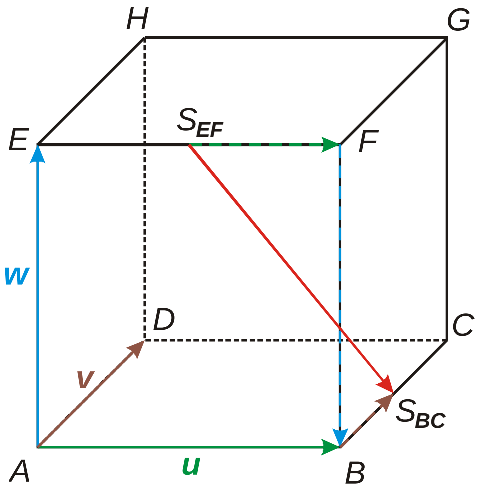

Z obrázku je vidět, že platí: $S = B + \frac{1}{2}(C - B) + \frac{1}{2}(E - A)$.

$S = [5;2;1] + \frac{1}{2}(-4;3;0) + \frac{1}{2}(0;0;5) = [3;\ 3,5;\ 3,5]$

**e) Označíme vektory $\boldsymbol{u} = B - A$, $\boldsymbol{v} = D - A$ a $\boldsymbol{w} = E - A$. Vyjádři pomocí těchto vektorů vektory $S_{AB} - C$, $S_{BC} - S_{EF}$.**




Z obrázku je vidět, že platí: $S_{AB} - C = -\frac{1}{2}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$




Z obrázku je vidět, že platí:

$$S_{BC} - S_{EF} = \frac{1}{2}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}$$

**Př. 7:** Petáková:
strana 100/cvičení 12
strana 100/cvičení 14
strana 101/cvičení 22
strana 101/cvičení 23

**Shrnutí:**