7.2.8 Skalární součin II

Předpoklady: 7207

Pedagogická poznámka: Hodina má tři části, považuji tu prostřední za nejméně důležitou a proto v případě potřeby omezuji hlavně ji. Na začátku hodiny je důležité nechat studentům čas na samostatné hledání kolmých vektorů.

Teď už se můžeme věnovat řešení příkladů, které využívají skalární součin a jeho vlastnosti.

Př. 1: Rozhodni výpočtem, zda jsou vektory $\boldsymbol{u}=(2;-3)$ a $\boldsymbol{v}=(2;1)$ navzájem kolmé.

Platí: $\boldsymbol{uv}=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\varphi$, pokud jsou vektory na sebe kolmé, platí $\varphi=90° \Rightarrow \cos 90°=0 \Rightarrow$ $\boldsymbol{uv}=0 \Rightarrow$ stačí spočítat skalární součin, pokud je nulový jsou vektory na sebe kolmé.
$\boldsymbol{uv}=(2;-3)\cdot(2;1)=2\cdot2+(-3)\cdot1=1 \Rightarrow$ vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ na sebe kolmé nejsou.

Př. 2: Najdi alespoň dva vektory kolmé na vektor $\boldsymbol{u}=(1;5)$.

Kolmých vektorů je nekonečně mnoho (ale jsou všechny navzájem rovnoběžné). Že je vektor kolmý na vektor $\boldsymbol{u}$, poznáme pomocí skalárního součinu: $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_1v_1+u_2v_2=0$. Jde například o tyto vektory:

- $\boldsymbol{v}=(5;-1)$, protože $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=1\cdot5+5\cdot(-1)=0$
- $\boldsymbol{w}=(-5;1)$, protože $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}=1\cdot(-5)+5\cdot1=0$
- a spousta dalších možností.

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu je důležité dotlačit žáky k tomu, aby se o řešení alespoň pokusili a ozkoušeli ho skalárním násobením. Pak i většina těch, kteří vektor odhadnou špatně, najde správné řešení.

Př. 3: Najdi obecný postup, jak určit souřadnice vektoru v rovině, který je kolmý na vektor $\boldsymbol{u}=(u_1;u_2)$.

Skalární součin musí být roven nule $\Rightarrow \boldsymbol{uv}=u_1v_1+u_2v_2=0$. Aby to vyšlo stačí položit $v_1=u_2$ a $v_2=-u_1$. Po dosazení $\boldsymbol{uv}=u_1u_2+u_2(-u_1)=u_1u_2-u_2u_1=0$
Druhá možnost $v_1=-u_2$ $v_2=u_1$.

Předchozí pravidlo je velmi důležité! Budeme ho časem používat i několikrát v jediné hodině.

Př. 4: Najdi všechny vektory kolmé na vektor $\boldsymbol{u}=(-2;3)$. Výsledek ověř pomocí skalárního součinu.

Jedním z kolmých vektorů je vektor $\boldsymbol{v}=(3;2)$, $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(-2)\cdot3+3\cdot2=0$.

Všechny další hledané vektory jsou jeho násobky $\Rightarrow$ na vektor $\boldsymbol{u}=(-2;3)$ jsou kolmé vektory $(3k;2k)$ $k\in R-\{0\}$.

Ověření: $(-2;3)\cdot(3k;2k)=(-2)\cdot 3k+3\cdot 2k=-6k+6k=0$.

Př. 5: Najdi vektor kolmý na vektor $\boldsymbol{u}=(-2;3;4)$. Správnost výsledku ověř pomocí skalárního součinu.

Vektory jsou navzájem kolmé, právě když je jejich skalární součin roven nule $\Rightarrow$ u vektorů v prostoru si můžeme zvolit první dvě souřadnice libovolně a třetí dopočítáme tak, aby skalární součin vyšel nulový.

$\boldsymbol{v}=(25;3;x)$

$\boldsymbol{uv}=(-2;3;4)(25;3;x)=-2\cdot 25+3\cdot 3+4\cdot x=0$

$4x=41$

$x=\frac{41}{4}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{v}=\left(25;3;\frac{41}{4}\right)$

Ověření: $\boldsymbol{uv}=(-2;3;4)\left(25;3;\frac{41}{4}\right)=-2\cdot 25+3\cdot 3+4\cdot\frac{41}{4}=0$

Elegantnější řešení: $\boldsymbol{v}=(2;0;x)$

$\boldsymbol{uv}=(-2;3;4)(2;0;x)=-2\cdot 2+3\cdot 0+4\cdot x=0$

$x=1\ \Rightarrow\ \boldsymbol{v}=(2;0;1)$

Ověření: $\boldsymbol{uv}=(-2;3;4)(2;0;1)=-2\cdot 2+3\cdot 0+4\cdot 1=0$

Nejelegantnější řešení:
U jedné souřadnice napíšeme nulu, pro zbývající použijeme pravidlo pro dvojsložkové vektory:

$\boldsymbol{v}=(3;2;0)$

Ověření: $\boldsymbol{uv}=(-2;3;4)(3;2;0)=-2\cdot 3+3\cdot 2+4\cdot 0=0$.

Pedagogická poznámka: Příklad je jednoduchý, ale často působí studentům problémy podobně jako jiné příklady, ve kterých existuje více řešení.
Diskuse o výhodnosti jednotlivých řešení záleží na rychlosti postupu v hodině. Je třeba, aby si studenti ozkoušeli, že jde o jinou situaci než v rovině, kde všechny kolmé vektory leží na jedné přímce.

Pedagogická poznámka: Hlavní funkcí ověření u předchozích dvou příkladů je opakování výpočtu skalárního součinu, aby s ním měli studenti menší problémy ke konci hodiny.

Pedagogická poznámka: Další (důkazová) část hodiny většinu studentů příliš neoslovuje. Kdyby měli používat skalární součin při výpočtech, intuitivně by postupovali správně a proto jim rozebírání a důkazy přijdou zbytečné. Snažím se postupovat tak, aby na příklady 7 a 8 zbylo minimálně 15 minut času.
Pokud mají někteří studenti problémy s předchozí částí hodiny, důkazy nakousnu pro zbytek třídy a s nimi se vrátím na začátek.

V minulé hodině jsme si odvodili význam skalárního součinu, ale v našem odvození byla nedůslednost. Vypočítali jsme si skalární součin ve speciální soustavě souřadnic $\Rightarrow$ musíme dokázat, že skalární součin na volbě soustavy souřadnic nezávisí, podobně jako na soustavě souřadnic nezávisí velikost vektoru.

Skalární součin má podobné vlastnosti jako jiné druhy součinů.

Př. 6: Doplň následující pravidla pro skalární součin.
Pro každé vektory ***u***, ***v***, ***w*** (v rovině nebo v prostoru) a každé reálné číslo c platí:
a) $\boldsymbol{uv} =$ b) $(c\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} =$ c) $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = .$
Alespoň dva vztahy dokaž pro vektory v rovině vypočítáním obou stran rovnosti.

Pro každé vektory ***u***, ***v***, ***w*** (v rovině nebo v prostoru) a každé reálné číslo c platí:
$$\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{vu}$$
$$(c\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = c(\boldsymbol{uv})$$
$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{wu}+\boldsymbol{wv}\,.$$

Důkazy:
$\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{vu}$
$u_1v_1 + u_2v_2 = v_1u_1 + v_2u_2$
Vztah platí, neboť násobení reálných čísel je komutativní a platí tedy $u_1v_1 = v_1u_1$.
$(c\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = c(\boldsymbol{uv})$
Levá strana: $(c\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = (cu_1; cu_2)(v_1; v_2) = cu_1v_1 + cu_2v_2$.
Pravá strana: $c(\boldsymbol{uv}) = c(u_1v_1 + u_2v_2) = cu_1v_1 + cu_2v_2$.
$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{wu}+\boldsymbol{wv}$
Levá strana: $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = (w_1; w_2)(u_1+v_1; u_2+v_2) = w_1(u_1+v_1) + w_2(u_2+v_2)$.
Pravá strana: $\boldsymbol{wu}+\boldsymbol{wv} = (w_1; w_2)(u_1; u_2) + (w_1; w_2)(v_1; v_2) = w_1u_1 + w_2u_2 + w_1v_1 + w_2v_2$.

Předchozí pravidla nám umožňují roznásobovat skalárním součinem závorky.

Př. 7: Vypočti:
a) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})$ b) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})^2$ c) $(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^2$

Pro každé vektory ***a***, ***b***, ***c***, ***d*** platí: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{ac}+\boldsymbol{ad}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{bd}$.

Pro každé vektory ***u***, ***v*** platí: $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})^2 = \boldsymbol{u}^2 + 2\boldsymbol{uv} + \boldsymbol{v}^2$.

Pro každé vektory ***u***, ***v*** platí: $(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^2 = \boldsymbol{u}^2 - 2\boldsymbol{uv} + \boldsymbol{v}^2$.

Poslední vztah můžeme upravit:
$(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^2 = \boldsymbol{u}^2 - 2\boldsymbol{uv} + \boldsymbol{v}^2$
$2\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{u}^2 + \boldsymbol{v}^2 - (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^2$
platí $\boldsymbol{u}^2 = |\boldsymbol{u}|^2$, $\boldsymbol{v}^2 = |\boldsymbol{v}|^2$, $(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^2 = |\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|^2$, po dosazení a vydělení dvěma získáme:

$\boldsymbol{uv} = \frac{1}{2}\left(|\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|^2\right)$ - to jsme potřebovali, skalární součin je vyjádřen pomocí velikostí vektorů, které nezávisí na soustavě souřadnic $\Rightarrow$ skalární součin také nezávisí na volbě soustavy souřadnic $\Rightarrow$ odvození z minulé hodiny bylo zcela v pořádku.

Vzorec pro skalární součin můžeme upravit:

$\boldsymbol{uv} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$ $\Rightarrow$ můžeme snadno spočítat úhel, který svírají dva vektory.

Př. 8: Urči úhel, který svírají dvojice vektorů z příkladu 2 z minulé hodiny, a porovnej výsledky s nakreslenými obrázky:
a) $\boldsymbol{u} = (4;3)$, $\boldsymbol{v} = (3;4)$, b) $\boldsymbol{u} = (4;3)$, $\boldsymbol{v} = (0;5)$.

a) $\boldsymbol{u} = (4;3)$, $\boldsymbol{v} = (3;4)$

$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 24$

$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{24}{5 \cdot 5} \Rightarrow \varphi = 16°16'$

b) $\boldsymbol{u} = (4;3)$, $\boldsymbol{v} = (0;5)$

$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$

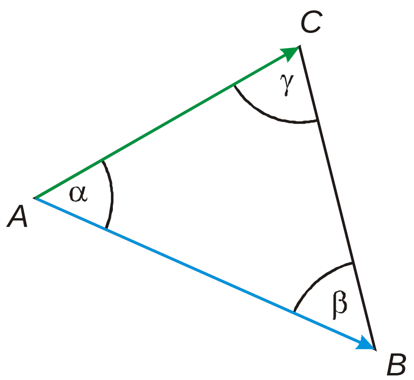
$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$

$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{15}{5 \cdot 5} \Rightarrow \varphi = 53°8'$

Oba výsledky odpovídají obrázkům z minulé hodiny.

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu jde sice o pouhé dosazení do vzorce, ale problémů se objeví dost. Někteří studenti určují pouze polovinu skalárního součinu, jiní mají problémy s velikostmi vektorů.

Př. 9: Je dán trojúhelník *ABC*, $A[1;-2;3]$, $B[4;5;2]$ a $C[-3;-2;-2]$. Urči vnitřní úhly.



Z obrázku je vidět, že úhel α můžeme urči pomocí skalárního součinu vektorů $B-A$ a $C-A$.

$B-A=(3;7;-1)\Rightarrow |B-A|=\sqrt{3^2+7^2+(-1)^2}=\sqrt{59}$

$C-A=(-4;0;-5)\Rightarrow |C-A|=\sqrt{(-4)^2+0^2+(-5)^2}=\sqrt{41}$

$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}=\frac{(3;7;-1)(-4;0;-5)}{\sqrt{59}\cdot\sqrt{41}}=\frac{-12+5}{\sqrt{59}\cdot\sqrt{41}}=-0,142\Rightarrow\alpha=98°11'$

β pomocí vektorů $A-B$ a $C-B$:

$A-B=(-3;-7;1)\Rightarrow |B-A|=\sqrt{(-3)^2+(-7)^2+1^2}=\sqrt{59}$

$C-B=(-7;-7;-4)\Rightarrow |C-B|=\sqrt{(-7)^2+(-7)^2+(-4)^2}=\sqrt{114}$

$\cos\beta=\frac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}=\frac{(-3;-7;1)(-7;-7;-4)}{\sqrt{59}\cdot\sqrt{114}}=\frac{21+49-4}{\sqrt{59}\cdot\sqrt{114}}=0,805\Rightarrow\beta=36°25'$

γ pomocí vektorů $A-C$ a $B-C$:

$A-C=(4;0;5)\Rightarrow |A-C|=\sqrt{4^2+0^2+5^2}=\sqrt{41}$

$B-C=(7;7;4)\Rightarrow |B-C|=\sqrt{7^2+7^2+4^2}=\sqrt{114}$

$\cos\gamma=\frac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}=\frac{(4;0;5)(7;7;4)}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{114}}=\frac{28+0+20}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{114}}=0,702\Rightarrow\gamma=45°24'$

Rozhodně rychlejší výpočet než pomocí kosinové věty.

Pedagogická poznámka: Většina studentů sama přijde na to, že musí určit vektory, které leží na jednotlivých stranách. Značná část z nich ale nedává pozor, když vektory vypočtené pro předchozí úhel používá u dalšího vrcholu. Často pak určují místo vnitřního úhlu jeho doplněk do $180°$ stupňů.

Př. 10: Petáková:
strana 101/cvičení 25 c) d)
strana 101/cvičení 26 c)
strana 101/cvičení 31 c)
strana 102/cvičení 32

Shrnutí: Pomocí skalárního součinu snadno nalezneme kolmý vektor – prohozením souřadnic a otočením jednoho znaménka.