

7.2.8 Skalární součin II

Předpoklady: 7207

Pedagogická poznámka: Hodina má tři části, považuji tu prostřední za nejméně důležitou, a proto v případě potřeby omezují hlavně ji. Na začátku hodiny je důležité nechat studentům čas na samostatné hledání kolmých vektorů.

Teď už se můžeme věnovat řešení příkladů, které využívají skalární součin a jeho vlastnosti.

Př. 1: Rozhodni výpočtem, zda jsou vektory $\mathbf{u} = (2; -3)$ a $\mathbf{v} = (2; 1)$ navzájem kolmé.

Platí: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \varphi$, pokud jsou vektory na sebe kolmé, platí $\varphi = 90^\circ \Rightarrow \cos 90^\circ = 0 \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow$ stačí spočítat skalární součin, pokud je nulový, jsou vektory na sebe kolmé.
 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2; -3) \cdot (2; 1) = 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 = 1 \Rightarrow$ vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} na sebe kolmé nejsou.

Př. 2: Najdi alespoň dva vektory kolmé na vektor $\mathbf{u} = (1; 5)$.

Kolmých vektorů je nekonečně mnoho (ale jsou všechny navzájem rovnoběžné). Že je vektor kolmý na vektor \mathbf{u} , poznáme pomocí skalárního součinu: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$. Jde například o tyto vektory:

- $\mathbf{v} = (5; -1)$, protože $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 5 + 5 \cdot (-1) = 0$
- $\mathbf{w} = (-5; 1)$, protože $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 1 \cdot (-5) + 5 \cdot 1 = 0$
- a spousta dalších možností.

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu je důležité dotlačit žáky k tomu, aby se o řešení alespoň pokusili a ozkoušeli ho skalárním násobením. Pak i většina těch, kteří vektor odhadnou špatně, najde správné řešení.

Př. 3: Najdi obecný postup, jak určit souřadnice vektoru v rovině, který je kolmý na vektor $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$.

Skalární součin musí být roven nule $\Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$. Aby to vyšlo, stačí položit $v_1 = u_2$ a $v_2 = -u_1$. Po dosazení $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 u_2 + u_2 (-u_1) = u_1 u_2 - u_2 u_1 = 0$
Druhá možnost $v_1 = -u_2$ $v_2 = u_1$.

Předchozí pravidlo je velmi důležité! Budeme ho časem používat i několikrát v jediné hodině.

Př. 4: Najdi všechny vektory kolmé na vektor $\mathbf{u} = (-2; 3)$. Výsledek ověř pomocí skalárního součinu.

Jedním z kolmých vektorů je vektor $\mathbf{v} = (3; 2)$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 0$.

Všechny další hledané vektory jsou jeho násobky \Rightarrow na vektor $\mathbf{u} = (-2; 3)$ jsou kolmé vektory $(3k; 2k)$ $k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Ověření: $(-2; 3) \cdot (3k; 2k) = (-2) \cdot 3k + 3 \cdot 2k = -6k + 6k = 0$.

Př. 5: Najdi vektor kolmý na vektor $\mathbf{u} = (-2; 3; 4)$. Správnost výsledku ověř pomocí skalárního součinu.

Vektory jsou navzájem kolmé, právě když je jejich skalární součin roven nule \Rightarrow u vektorů v prostoru si můžeme zvolit první dvě souřadnice libovolně a třetí dopočítáme tak, aby skalární součin vyšel nulový.

$$\mathbf{v} = (25; 3; x)$$

$$\mathbf{uv} = (-2; 3; 4) \cdot (25; 3; x) = -2 \cdot 25 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot x = 0$$

$$4x = 41$$

$$x = \frac{41}{4} \Rightarrow \mathbf{v} = \left(25; 3; \frac{41}{4} \right)$$

$$\text{Ověření: } \mathbf{uv} = (-2; 3; 4) \cdot \left(25; 3; \frac{41}{4} \right) = -2 \cdot 25 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot \frac{41}{4} = 0$$

Elegantnější řešení: $\mathbf{v} = (2; 0; x)$

$$\mathbf{uv} = (-2; 3; 4) \cdot (2; 0; x) = -2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot x = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow \mathbf{v} = (2; 0; 1)$$

$$\text{Ověření: } \mathbf{uv} = (-2; 3; 4) \cdot (2; 0; 1) = -2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 0$$

Nejelegantnější řešení:

U jedné souřadnice napíšeme nulu, pro zbývající použijeme pravidlo pro dvousložkové vektory:

$$\mathbf{v} = (3; 2; 0)$$

$$\text{Ověření: } \mathbf{uv} = (-2; 3; 4) \cdot (3; 2; 0) = -2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 0$$

Pedagogická poznámka: Příklad je jednoduchý, ale často působí studentům problémy podobně jako jiné příklady, ve kterých existuje více řešení. Diskuse o výhodnosti jednotlivých řešení záleží na rychlosti postupu v hodině. Je třeba, aby si studenti ozkoušeli, že jde o jinou situaci než v rovině, kde všechny kolmé vektory leží na jedné přímce.

Pedagogická poznámka: Hlavní funkcí ověření u předchozích dvou příkladů je opakování výpočtu skalárního součinu, aby s ním měli studenti menší problémy ke konci hodiny.

Pedagogická poznámka: Další (důkazová) část hodiny většinu studentů příliš neoslovuje. Kdyby měli používat skalární součin při výpočtech, intuitivně by postupovali správně a proto jim rozebírání a důkazy přijdou zbytečné. Snažím se postupovat tak, aby na příklady 7 a 8 zbylo minimálně 15 minut času. Pokud mají někteří studenti problémy s předchozí částí hodiny, důkazy nakousnu pro zbytek třídy a s nimi se vrátím na začátek.

$uv = \frac{1}{2}(|u|^2 + |v|^2 - |u-v|^2)$ - to jsme potřebovali, skalární součin je vyjádřen pomocí velikostí vektorů, které nezávisí na soustavě souřadnic \Rightarrow skalární součin také nezávisí na volbě soustavy souřadnic \Rightarrow odvození z minulé hodiny bylo zcela v pořádku.

Vzorec pro skalární součin můžeme upravit:

$$uv = |u||v|\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{uv}{|u||v|} \Rightarrow \text{můžeme snadno spočítat úhel, který svírají dva vektory.}$$

Př. 8: Urči úhel, který svírají dvojice vektorů z příkladu 2 z minulé hodiny, a porovnej výsledky s nakreslenými obrázky:

a) $u = (4;3)$, $v = (3;4)$,

b) $u = (4;3)$, $v = (0;5)$.

a) $u = (4;3)$, $v = (3;4)$

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 24$$

$$\cos\varphi = \frac{uv}{|u||v|} = \frac{24}{5 \cdot 5} \Rightarrow \varphi = 16^\circ 16'$$

b) $u = (4;3)$, $v = (0;5)$

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$$

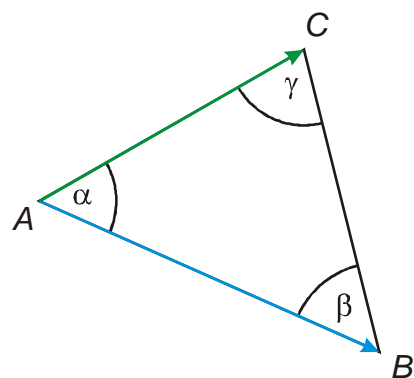
$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$$

$$\cos\varphi = \frac{uv}{|u||v|} = \frac{15}{5 \cdot 5} \Rightarrow \varphi = 53^\circ 8'$$

Oba výsledky odpovídají obrázkům z minulé hodiny.

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu jde sice o pouhé dosazení do vzorce, ale problémů se objeví dost. Někteří studenti určují pouze polovinu skalárního součinu, jiní mají problémy s velikostmi vektorů.

Př. 9: Je dán trojúhelník ABC , $A[1; -2; 3]$, $B[4; 5; 2]$ a $C[-3; -2; -2]$. Urči vnitřní úhly.



Z obrázku je vidět, že úhel α můžeme určit pomocí skalárního součinu vektorů $B-A$ a $C-A$.

$$B - A = (3; 7; -1) \Rightarrow |B - A| = \sqrt{3^2 + 7^2 + (-1)^2} = \sqrt{59}$$

$$C - A = (-4; 0; -5) \Rightarrow |C - A| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$$

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{(3; 7; -1)(-4; 0; -5)}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{41}} = \frac{-12 + 5}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{41}} = -0,142 \Rightarrow \alpha = 98^\circ 11'$$

β pomocí vektorů $A - B$ a $C - B$:

$$A - B = (-3; -7; 1) \Rightarrow |A - B| = \sqrt{(-3)^2 + (-7)^2 + 1^2} = \sqrt{59}$$

$$C - B = (-7; -7; -4) \Rightarrow |C - B| = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2 + (-4)^2} = \sqrt{114}$$

$$\cos \beta = \frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{(-3; -7; 1)(-7; -7; -4)}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{114}} = \frac{21 + 49 - 4}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{114}} = 0,805 \Rightarrow \beta = 36^\circ 25'$$

γ pomocí vektorů $A - C$ a $B - C$:

$$A - C = (4; 0; 5) \Rightarrow |A - C| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

$$B - C = (7; 7; 4) \Rightarrow |B - C| = \sqrt{7^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{114}$$

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{(4; 0; 5)(7; 7; 4)}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{114}} = \frac{28 + 0 + 20}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{114}} = 0,702 \Rightarrow \gamma = 45^\circ 24'$$

Rozhodně rychlejší výpočet než pomocí kosinové věty.

Pedagogická poznámka: Většina studentů sama přijde na to, že musí určit vektory, které leží na jednotlivých stranách. Značná část z nich ale nedává pozor, když vektory vypočtené pro předchozí úhel používá u dalšího vrcholu. Často pak určují místo vnitřního úhlu jeho doplněk do 180° stupňů.

Př. 10: Petáková:

strana 101/cvičení 25 c) d)

strana 101/cvičení 26 c)

strana 101/cvičení 31 c)

strana 102/cvičení 32

Shrnutí: Pomocí skalárního součinu snadno nalezneme kolmý vektor – prohozením souřadnic a otočením jednoho znaménka.