

7.2.9 Skalární součin III

Předpoklady: 7208

Pedagogická poznámka: Hodina obsahuje tři poměrně jednoduché příklady. Pokud chcete dosáhnout toho, aby studenti pracovali samostatně (hlavně při sestavování rovnic), víc toho nestihnete. Je dobré oddělit dvě části řešení: sestavování rovnic a jejich řešení. V případě, že špatně stíháme, příklady nedopočítáváme (řešit rovnice už by studenti měli umět) a věnujeme se hlavně sestavování rovnic.

Př. 1: Najdi vektor \mathbf{v} kolmý na vektor $\mathbf{u} = (3;1)$ takový, aby platilo $|\mathbf{v}| = 2\sqrt{5}$.

Příklad můžeme řešit dvěma způsoby.

a) „konstrukční“ řešení

Výpočty napodobujeme geometrickou konstrukcí požadovaného útvaru \Rightarrow nejdříve si určíme směr kolmý na vektor \mathbf{u} : $\mathbf{u} = (3;1) \Rightarrow$ vektor $\mathbf{w} = (-1;3)$ je kolmý, platí $\mathbf{v} = k \cdot \mathbf{w}$.

Teď zajistíme správnou velikost: $|\mathbf{w}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

Platí: $|\mathbf{v}| = 2\sqrt{5} = k \cdot \sqrt{10} \Rightarrow k = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \sqrt{2}$.

$$\mathbf{v} = k \cdot \mathbf{w} = \sqrt{2}(-1;3) = (-\sqrt{2}; 3\sqrt{2}) \text{ nebo } \mathbf{v} = k \cdot \mathbf{w} = -\sqrt{2}(-1;3) = (\sqrt{2}; -3\sqrt{2})$$

b) „analytické“ řešení

Sestavíme rovnice, které popisují podmínky pro souřadnice hledaného vektoru. Řešení získáme vyřešením sestavené soustavy rovnic.

Hledaný vektor: $\mathbf{v} = (v_1; v_2) \Rightarrow$ hledáme dvě čísla \Rightarrow potřebujeme dvě rovnice.

1. podmínka: kolmost vektorů \Rightarrow skalární součin musí být roven nule:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (3;1) \cdot (v_1; v_2) = 3v_1 + 1 \cdot v_2 = 0.$$

2. podmínka: velikost vektoru \mathbf{v} : $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 2\sqrt{5}$.

Řešíme soustavu rovnic:
$$\begin{aligned} 3v_1 + 1 \cdot v_2 &= 0 \\ \sqrt{v_1^2 + v_2^2} &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme $v_2 = -3v_1$ a dosadíme do druhé:

$$\sqrt{v_1^2 + (-3v_1)^2} = 2\sqrt{5} \quad /^2$$

$$v_1^2 + 9v_1^2 = 20$$

$$10v_1^2 = 20$$

$$v_1^2 = 2 \Rightarrow v_1 = \pm\sqrt{2}$$

Dvě řešení: $\mathbf{v} = (-\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$, $\mathbf{w} = (\sqrt{2}; -3\sqrt{2})$.

Pedagogická poznámka: Určitě nechte studenty dosadit do skalárního součinu samostatně. Někteří budou mít problémy.

Př. 2: Je dán vektor $\mathbf{u} = (\sqrt{2}; -\sqrt{2})$. Urči vektor \mathbf{v} tak, aby s vektorem \mathbf{u} svíral úhel 45° a jeho velikost byla 2. Správnost řešení potvrď obrázkem.

Příklad řešíme analytickým způsobem.

Hledaný vektor $\mathbf{v} = (x; y) \Rightarrow$ dvě neznámé \Rightarrow potřebujeme dvě rovnice.

1. podmínka: velikost vektoru \mathbf{v} je 2 $\Rightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2$.

2. podmínka: úhel vektorů \mathbf{u} a \mathbf{v} je $45^\circ \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$.

Spočteme velikosti vektoru: $|\mathbf{u}| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$.

Dosadíme do rovnice $\cos 45^\circ = \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(\sqrt{2}; -\sqrt{2})(x; y)}{2 \cdot 2} \quad / \cdot 4$$

$$2\sqrt{2} = x\sqrt{2} - y\sqrt{2} \quad / : \sqrt{2}$$

$$2 = x - y \Rightarrow x = y + 2$$

Dosadíme do první rovnice: $\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \quad / ^2$.

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$(y + 2)^2 + y^2 = 4$$

$$y^2 + 4y + 4 + y^2 = 4$$

$$2y^2 + 4y = 0 \quad / : 2$$

$$y(y + 2) = 0$$

$$y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = y_1 + 2 = 2$$

$$y_2 = -2 \Rightarrow x_2 = y_2 + 2 = 0$$

Úloha má dvě řešení $\mathbf{v}_1 = (2; 0)$ a $\mathbf{v}_2 = (0; -2)$.

Pedagogická poznámka: Podmínku pro úhel je dobré pouze říct a nechat zrealizovat studenty. Poměrně velké množství z nich pak vytvoří rovnici $\cos 45^\circ = \mathbf{u}\mathbf{v}$, která je nápodobou rovnice $\mathbf{u}\mathbf{v} = 0$. Je třeba jim ukázat původní vztah $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos \varphi = \mathbf{u}\mathbf{v}$, ze kterého je vidět, že pouze pro úhel $\varphi = 90^\circ$ je pravá strana nulová a na součinu absolutních hodnot nezáleží.

Př. 3: Jsou dány body $A[-4; -1]$, $B[2; 1]$. Najdi bod C tak, aby zároveň platilo:

- vektory $C - A$ a $C - B$ jsou navzájem kolmé,
- vektory $C - A$ a $C - B$ mají stejnou velikost.

Hledáme souřadnice bodu $C[x; y] \Rightarrow$ dvě neznámé \Rightarrow potřebujeme dvě rovnice (ze dvou podmínek to bude jednoduché).

Určujeme souřadnice bodu C , ale podmínky se týkají vektorů \mathbf{AC} a $\mathbf{BC} \Rightarrow$ určíme tyto vektory: $C - A = (x + 4; y + 1)$, $C - B = (x - 2; y - 1)$.

1. podmínka: Vektory $C-A$ a $C-B$ jsou navzájem kolmé \Rightarrow skalární součin musí být nulový: $(C-A)(C-B)=0$.

$$(x+4; y+1)(x-2; y-1) = (x+4)(x-2) + (y+1)(y-1) = 0$$

$$x^2 - 2x + 4x - 8 + y^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 9 = 0$$

2. podmínka: Vektory $C-A$ a $C-B$ mají stejnou velikost: $|C-A|=|C-B|$.

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} \quad /^2$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$$

$$12x + 4y = -12$$

$$y = -3 - 3x$$

Dosadíme do první rovnice: $x^2 + (-3-3x)^2 + 2x - 9 = 0$.

$$x^2 + 9 + 18x + 9x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$10x^2 + 20x = 0$$

$$x(x+2) = 0$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = -3 \qquad x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = 3$$

Existují dva body, které splňují zadání příkladu: $C_1[0; -3]$ a $C_2[-2; 3]$.

Pedagogická poznámka: Stejně jako u obou předchozích příkladů jde hlavně o konkrétní dosazování do rovnic, které reprezentují podmínky. Vzhledem k tomu, že souřadnice vektorů jsou poměrně „složitě“, dělají studenti hodně chyb tím, že se podvědomě snaží vyrobit jednodušší výrazy.

Shrnutí: Při řešení „analytickou“ metodou postupujeme ve třech krocích:

1. zavedeme si neznámé (většinou souřadnice bodu nebo vektoru),
2. podmínky ze zadání přepíšeme pomocí zavedených neznámých do rovnic,
3. soustavu rovnic vyřešíme.

Př. 4: Petáková:

strana 101/cvičení 29 b)

strana 102/cvičení 35

strana 102/cvičení 38

strana 102/cvičení 40

strana 101/cvičení 42 c)

strana 101/cvičení 43

Shrnutí: Při řešení „analytickou“ metodou sestavujeme z podmínek v zadání rovnice a pak řešíme vzniklé soustavy.