7.2.9 Skalární součin III

Předpoklady: 7208

Pedagogická poznámka: Hodina obsahuje tři poměrně jednoduché příklady. Pokud chcete dosáhnout toho, aby studenti pracovali samostatně (hlavně při sestavování rovnic) víc toho nestihnete. Je dobré oddělit dvě části řešení: sestavování rovnic a jejich řešení. V případě, že špatně stíháme, příklady nedopočítáváme (řešit rovnice už by studenti měli umět) a věnujeme se hlavně sestavování rovnic.

Př. 1: Najdi vektor $\boldsymbol{v}$ kolmý na vektor $\boldsymbol{u}=(3;1)$ takový, aby platilo $|\boldsymbol{v}|=2\sqrt{5}$.

Příklad můžeme řešit dvěma způsoby.

a) „konstrukční“ řešení

Výpočty napodobujeme geometrickou konstrukci požadovaného útvaru $\Rightarrow$ nejdříve si určíme směr kolmý na vektor $\boldsymbol{u}$: $\boldsymbol{u}=(3;1)$ $\Rightarrow$ vektor $\boldsymbol{w}=(-1;3)$ je kolmý, platí $\boldsymbol{v}=k\cdot\boldsymbol{w}$.

Teď zajistíme správnou velikost: $|\boldsymbol{w}|=\sqrt{w_1^2+w_2^2}=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$.

Platí: $|\boldsymbol{v}|=2\sqrt{5}=k\cdot\sqrt{10}$ $\Rightarrow$ $k=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{5}}=\sqrt{2}$.

$\boldsymbol{v}=k\cdot\boldsymbol{w}=\sqrt{2}(-1;3)=\left(-\sqrt{2};3\sqrt{2}\right)$ nebo $\boldsymbol{v}=k\cdot\boldsymbol{w}=-\sqrt{2}(-1;3)=\left(\sqrt{2};-3\sqrt{2}\right)$

b) „analytické“ řešení

Sestavíme rovnice, které popisují podmínky pro souřadnice hledaného vektoru. Řešení získáme vyřešením sestavené soustavy rovnic.

Hledaný vektor: $\boldsymbol{v}=(v_1;v_2)$ $\Rightarrow$ hledáme dvě čísla $\Rightarrow$ potřebujeme dvě rovnice.

1. podmínka: kolmost vektorů $\Rightarrow$ skalární součin musí být roven nule:

$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(3;1)\cdot(v_1;v_2)=3v_1+1\cdot v_2=0$.

2. podmínka: velikost vektoru $\boldsymbol{v}$: $|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}=2\sqrt{5}$.

Řešíme soustavu rovnic: $\begin{array}{l} 3v_1+1\cdot v_2=0 \\ \sqrt{v_1^2+v_2^2}=2\sqrt{5} \end{array}$.

Z první rovnice vyjádříme $v_2=-3v_1$ a dosadíme do druhé:

$\sqrt{v_1^2+(-3v_1)^2}=2\sqrt{5} \quad /^2$

$v_1^2+9v_1^2=20$

$10v_1^2=20$

$v_1^2=2 \Rightarrow v_1=\pm\sqrt{2}$

Dvě řešení: $\boldsymbol{v}=\left(-\sqrt{2};3\sqrt{2}\right)$, $\boldsymbol{w}=\left(\sqrt{2};-3\sqrt{2}\right)$.

Pedagogická poznámka: Určitě nechte studenty dosadit do skalárního součinu samostatně. Někteří budou mít problémy.

Př. 2: Je dán vektor $\boldsymbol{u} = \left(\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$. Urči vektor $\boldsymbol{v}$ tak, aby s vektorem $\boldsymbol{u}$ svíral úhel $45°$ a jeho velikost byla 2. Správnost řešení potvrď obrázkem.

Příklad řešíme analytickým způsobem.
Hledaný vektor $\boldsymbol{v} = (x; y)$ $\Rightarrow$ dvě neznámé $\Rightarrow$ potřebujeme dvě rovnice.

1. podmínka: velikost vektoru $\boldsymbol{v}$ je 2 $\Rightarrow$ $|v| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2$.

2. podmínka: úhel vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je $45°$ $\Rightarrow$ $\cos 45° = \dfrac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$.

Spočteme velikosti vektoru: $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$.

Dosadíme do rovnice $\cos 45° = \dfrac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\left(\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)(x; y)}{2 \cdot 2} \quad / \cdot 4$$
$$2\sqrt{2} = x\sqrt{2} - y\sqrt{2} \quad / : \sqrt{2}$$
$$2 = x - y \;\Rightarrow\; x = y + 2$$

Dosadíme do první rovnice: $\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \quad /^2$.

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$(y+2)^2 + y^2 = 4$$
$$y^2 + 4y + 4 + y^2 = 4$$
$$2y^2 + 4y = 0 \quad / : 2$$
$$y(y+2) = 0$$

$y_1 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = y_1 + 2 = 2$ $\qquad$ $y_2 = -2 \;\Rightarrow\; x_2 = y_2 + 2 = 0$

Úloha má dvě řešení $\boldsymbol{v}_1 = (2; 0)$ a $\boldsymbol{v}_2 = (0; -2)$.

Pedagogická poznámka: Podmínku pro úhel je dobré pouze říct a nechat zrealizovat studenty. Poměrně velké množství z nich pak vytvoří rovnici $\cos 45° = \boldsymbol{uv}$, která je nápodobou rovnice $\boldsymbol{uv} = 0$. Je třeba jim ukázat původní vztah $|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\varphi = \boldsymbol{uv}$, ze kterého je vidět, že pouze pro úhel $\varphi = 90°$ je pravá strana nulová a na součinu absolutních hodnot nezáleží.

Př. 3: Jsou dány body $A[-4; -1]$, $B[2; 1]$. Najdi bod C tak, aby zároveň platilo:
a) vektory $C - A$ a $C - B$ jsou navzájem kolmé,
b) vektory $C - A$ a $C - B$ mají stejnou velikost.

Hledáme souřadnice bodu $C[x; y]$ $\Rightarrow$ dvě neznámé $\Rightarrow$ potřebujeme dvě rovnice (ze dvou podmínek to bude jednoduché).
Určujeme souřadnice bodu C, ale podmínky se týkají vektorů $\boldsymbol{AC}$ a $\boldsymbol{BC}$ $\Rightarrow$ určíme tyto vektory: $C - A = (x + 4; y + 1)$, $\qquad$ $C - B = (x - 2; y - 1)$.

1. podmínka: Vektory $C-A$ a $C-B$ jsou navzájem kolmé $\Rightarrow$ skalární součin musí být nulový: $(C-A)(C-B)=0$.

$(x+4;y+1)(x-2;y-1)=(x+4)(x-2)+(y+1)(y-1)=0$

$x^2-2x+4x-8+y^2-1=0$

$x^2+y^2+2x-9=0$

2. podmínka: Vektory $C-A$ a $C-B$ mají stejnou velikost: $|C-A|=|C-B|$.

$\sqrt{(x+4)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} \quad /^2$

$x^2+8x+16+y^2+2y+1=x^2-4x+4+y^2-2y+1$

$12x+4y=-12$

$y=-3-3x$

Dosadíme do první rovnice: $x^2+(-3-3x)^2+2x-9=0$.

$x^2+9+18x+9x^2+2x-9=0$

$10x^2+20x=0$

$x(x+2)=0$

$x_1=0\Rightarrow y_1=-3 \qquad x_2=-2\Rightarrow y_2=3$

Existují dva body, které splňují zadání příkladu: $C_1[0;-3]$ a $C_2[-2;3]$.

Pedagogická poznámka: Stejně jako u obou předchozích příkladů jde hlavně o konkrétní dosazování do rovnic, které reprezentují podmínky. Vzhledem k tomu, že souřadnice vektorů jsou poměrně „složité“ dělají studenti hodně chyb tím, že se podvědomě snaží vyrobit jednodušší výrazy.

Shrnutí: Při řešení „analytickou“ metodou postupujeme ve třech krocích:
1. zavedeme si neznámé (většinou souřadnice bodu nebo vektoru),
2. podmínky ze zadání přepíšeme pomocí zavedených neznámých do rovnic,
3. soustavu rovnic vyřešíme.

Př. 4: Petáková:
strana 101/cvičení 29 b)
strana 102/cvičení 35
strana 102/cvičení 38
strana 102/cvičení 40
strana 101/cvičení 42 c)
strana 101/cvičení 43

Shrnutí: Při řešení „analytickou“ metodou sestavuje z podmínek v zadání rovnice a pak řešíme vzniklé soustavy.