

7.2.10 Skalární součin IV

Předpoklady: 7209

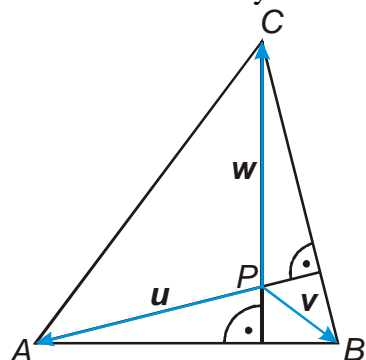
Pedagogická poznámka: Tato hodina je v kontextu učebnice zvláštní. Obsahuje dva důkazy a jeden příklad z klasické učebnice. Všechna tři zadání jsou značně obtížná a vyžadují nápad, proto je řeším normálně u tabule a pouze na určitých místech nechávám studenty udělat samostatně některé kroky. Kromě toho, že něco dělají samostatně, je tak možné zajistit i jejich větší pozornost. Žádná z myšlenek této hodiny se ve zbytku analytické geometrie nepoužívá, proto si přes matematickou zajímavost této hodiny myslím, že jde o jednu z těch, kterých je neméně škoda, a v případě spěchu ji nechávám dobrovolníkům na doma.

Skalární součin můžeme využít i pro rychlé provedení některých planimetrických důkazů.

Dokážeme, že výšky v trojúhelníku se protínají v jednom bodě.

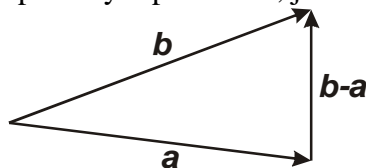
Označíme si průsečík výšek v_a a v_c jako bod P .

Získáme tak vektory $u = A - P$, $v = B - P$ a $w = C - P$.

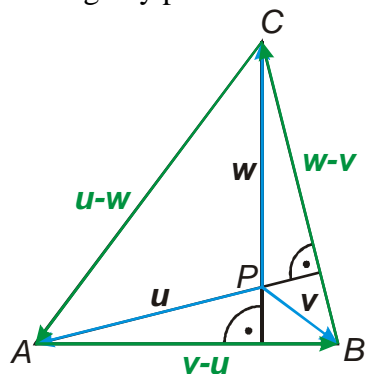


Př. 1: Urči pomocí vektorů u , v , w vektory: $A - C$, $B - A$ a $C - B$.

Při sčítání vektorů jsme si ukazovali, že vektor, získaný z koncových bodů dvou vektorů se společným počátkem, je roven jejich rozdílu.



Analogicky platí: $A - C = u - w$, $B - A = v - u$ a $C - B = w - v$.



Přímky PA a PC jsou výšky v trojúhelníku ABC proto platí:

- PA je kolmá na $BC \Rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{w}-\mathbf{v})=0 \Rightarrow \mathbf{uw}-\mathbf{uv}=0$,
- PC je kolmá na $AB \Rightarrow \mathbf{w}(\mathbf{v}-\mathbf{u})=0 \Rightarrow \mathbf{wv}-\mathbf{wu}=0$.

Chceme dokázat, že platí: PB je kolmá na AC .

Trik: Sečteme rovnosti: $\mathbf{uw}-\mathbf{uv}=0$ a $\mathbf{wv}-\mathbf{wu}=0$:

$$\mathbf{uw}-\mathbf{uv}+\mathbf{wv}-\mathbf{wu}=0$$

$$\mathbf{wv}-\mathbf{uv}=0$$

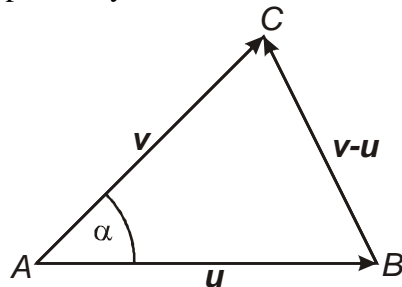
$\mathbf{v}(\mathbf{w}-\mathbf{u})=0 \Rightarrow PB$ je kolmá na $AC \Rightarrow$ bod P je i průsečíkem výšky v_b s výškami v_a a v_c .

Vektorové odvození kosinové věty:

V trojúhelníku ABC si označíme:

- $C-A=\mathbf{v}$,
- $B-A=\mathbf{u}$,

platí tedy i $C-B=\mathbf{v}-\mathbf{u}$.



Vyjádříme si druhou mocninu vektoru $C-B$:

$$|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2=|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2-2\mathbf{uv} \text{ (tuto rovnost jsme používali při důkazu vzorce pro skalární součin).}$$

Pro skalární součin platí: $\mathbf{uv}=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\alpha$.

$$\text{Dosadíme: } |\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2=|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2-2\mathbf{uv}=|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2-2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\alpha.$$

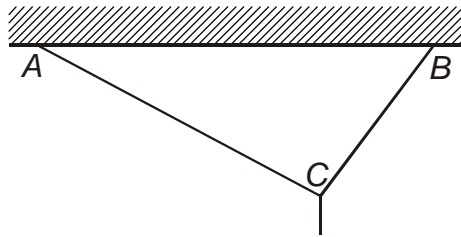
Věta je dokázána, výsledek bude přehlednější, když velikosti vektorů napíšeme jako velikosti

$$\text{stran: } \begin{aligned} |\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2 &= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\alpha \\ a^2 &= c^2 + b^2 - 2 \cdot c \cdot b \cos\alpha \end{aligned}$$

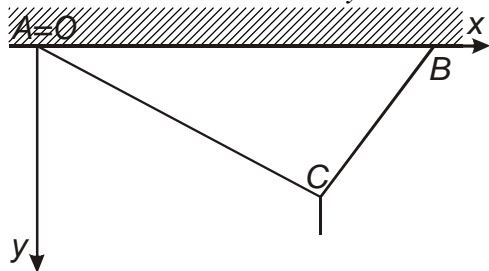
Pomocí vektorů se řeší i fyzikální příklady z praxe:

Na stropě tovární haly jsou zabudovány dva háky ve vzdálenosti 10,5 m od sebe. Na jednom z háků je zavěšeno lano dlouhé 8,5 m, na druhém lano dlouhé 5m. Volné konce obou lan jsou spojeny a v tomto místě je zavěšena kladka. Jakou maximální hmotnost může mít předmět zavěšený na kladku, pokud mají obě lana nosnost 10 t?

Př. 2: Nakresli schematický náčrtek situace. Bod, ve kterém je zavěšeno delší lano, označ A , bod zavěšení druhého lana B , bod, ve kterém jsou lana spojena označ C . Navrhni umístění souřadné soustavy, které by ulehčilo následující výpočet.



Soustavu souřadnic zvolíme tak, aby co největší počet souřadnic bodů, které nás zajímají, byl nulový \Rightarrow například tak, aby počátek soustavy souřadnic byl v bodě A , osa x směřovala vodorovně k bodu B a osa y směřovala kolmo dolů.

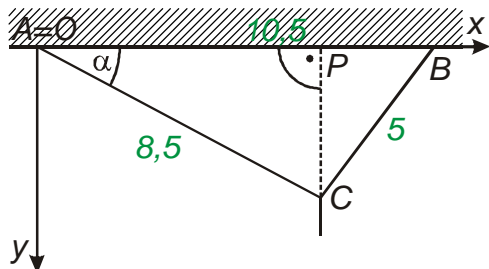


Př. 3: Urči souřadnice bodů A , B , C .

$A[0;0]$ - bod je shodný s počátkem soustavy souřadnic

$B[10,5;0]$ - bod leží na ose x , 10,5 m od bodu A (a tedy i od počátku)

Souřadnice bodu C musíme určit pomocí trojúhelníku ABC . Patu výšky v_c označíme P .



Určíme úhel α pomocí kosinové věty: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8,5^2 + 10,5^2 - 5^2}{2 \cdot 8,5 \cdot 10,5} = 0,49 \Rightarrow \alpha = 28^\circ 4'$$

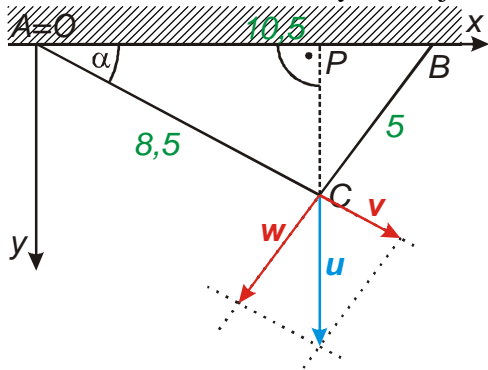
Vzdálenosti $|AP|$ a $|CP|$ určíme z pravoúhlého trojúhelníku APC :

- $\cos \alpha = \frac{|AP|}{|AC|} \Rightarrow |AP| = |AC| \cos \alpha = 8,5 \cdot \cos 28^\circ 4' = 7,5$,
- $\sin \alpha = \frac{|CP|}{|AC|} \Rightarrow |CP| = |AC| \sin \alpha = 8,5 \cdot \sin 28^\circ 4' = 4$,

$$\Rightarrow C[7,5;4].$$

Můžeme pokračovat v řešení příkladu.

Sílu, kterou působí náklad na kladku, můžeme znázornit svislým vektorem u . Tento vektor lana rozloží na dva vektory, které jsou rovnoběžné s jejich směry.



Platí:

- $u = v + w$ - vektor u je součtem vektorů v a w ,
- $v = k(C - A)$ - vektor v je rovnoběžný s vektorem $C - A$,
- $w = l(C - B)$ - vektor w je rovnoběžný s vektorem $C - B$.

Př. 4: Urči souřadnice vektorů $C - A$, $C - B$ a u .

$$C - A = (7, 5; 4)$$

$$C - B = (-3; 4)$$

$$u = (0; x) \quad x \text{ je maximální hmotnost, kterou můžeme na lana pověsit.}$$

$$\text{Dosadíme do rovnice } u = v + w : u = k(C - A) + l(C - B).$$

$$\text{Dosadíme souřadnice: } (0; x) = k(7, 5; 4) + l(-3; 4).$$

$$\text{Získáváme soustavu: } \begin{cases} 7,5k - 3l = 0 \\ 4k + 4l = x \end{cases}$$

$$\text{Z první rovnice dosadíme do druhé: } k = \frac{6}{15}l.$$

$$4 \cdot \frac{6}{15}l + 4l = x$$

$$\frac{28}{5}l = x$$

$$l = \frac{5x}{28} \quad k = \frac{6}{15} \cdot \frac{5x}{28} = \frac{x}{14}$$

Určíme velikosti vektorů v a w :

$$\bullet \quad |v| = |k| |C - A| = \frac{x}{14} \cdot 8,5 = \frac{17}{28}x,$$

$$\bullet \quad |w| = |l| |C - B| = \frac{5x}{28} \cdot 5 = \frac{25}{28}x.$$

Nosnost obou lan je 10 tun \Rightarrow

$$\bullet \quad |v| = \frac{17}{28}x \leq 10 \Rightarrow x \leq 16,5,$$

$$\bullet \quad |w| = \frac{25}{28}x \leq 10 \Rightarrow x \leq 11,2,$$

\Rightarrow hmotnost předmětu musí vyhovovat přísnější podmínce \Rightarrow na kladku je možné zavěsit maximálně 11,2 tuny.

Shrnutí: Analyticky je možné překvapivě jednoduše dokázat některé planimetrické nebo goniometrické věty.