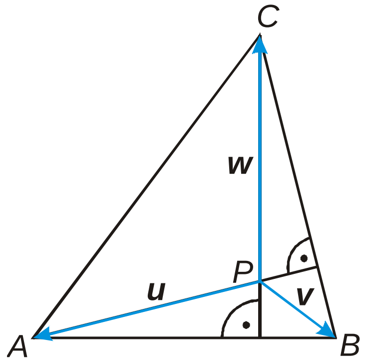
7.2.10 Skalární součin IV

Předpoklady: 7209

Pedagogická poznámka: Tato hodina je v kontextu učebnice zvláštní. Obsahuje dva důkazy a jeden příklad z klasické učebnice. Všechna tři zadání jsou značně obtížná a vyžadují nápad, proto je řeším normálně u tabule a pouze na určitých místech nechávám studenty udělat samostatně některé kroky. Kromě toho, že něco dělají samostatně, je tak možné zajistit i jejich větší pozornost.
Žádná z myšlenek této hodiny se ve zbytku analytické geometrie nepoužívá, proto si přes matematickou zajímavost této hodiny myslím, že jde o jednu z těch, kterých je neméně škoda, a v případě spěchu ji nechávám dobrovolníkům na doma.

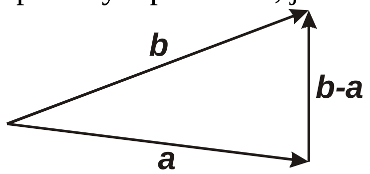
Skalární součin můžeme využít i pro rychlé provedení některých planimetrických důkazů.

Dokážeme, že výšky v trojúhelníku se protínají v jednom bodě.
Označíme si průsečík výšek v_a a v_c jako bod P.
Získáme tak vektory $\boldsymbol{u} = A - P$, $\boldsymbol{v} = B - P$ a $\boldsymbol{w} = C - P$.

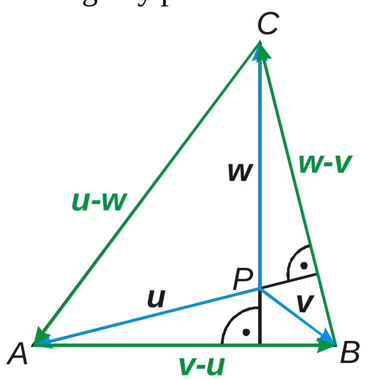


Př. 1: Urči pomocí vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ vektory: $A - C$, $B - A$ a $C - B$.

Při sčítání vektorů jsme si ukazovali, že vektor získaný z koncových bodů dvou vektorů se společným počátkem, je roven jejich rozdílu.



Analogicky platí: $A - C = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}$, $B - A = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ a $C - B = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}$.



Přímky PA a PC jsou výšky v trojúhelníku ABC proto platí:

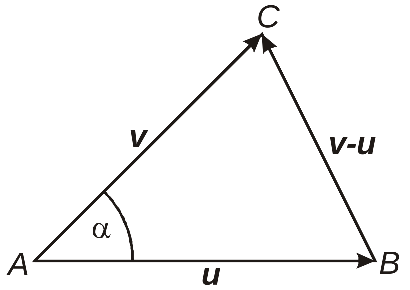
- PA je kolmá na $BC \Rightarrow \boldsymbol{u}(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v})=0 \Rightarrow \boldsymbol{uw}-\boldsymbol{uv}=0$,
- PC je kolmá na $AB \Rightarrow \boldsymbol{w}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})=0 \Rightarrow \boldsymbol{wv}-\boldsymbol{wu}=0$.

Chceme dokázat, že platí: PB je kolmá na AC.
Trik: Sečteme rovnosti: $\boldsymbol{uw}-\boldsymbol{uv}=0$ a $\boldsymbol{wv}-\boldsymbol{wu}=0$:
$\boldsymbol{uw}-\boldsymbol{uv}+\boldsymbol{wv}-\boldsymbol{wu}=0$
$\boldsymbol{wv}-\boldsymbol{uv}=0$
$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u})=0 \Rightarrow PB$ je kolmá na $AC \Rightarrow$ bod P je i průsečíkem výšky v_b s výškami v_a a v_c.

Vektorové odvození kosinové věty:
V trojúhelníku ABC si označíme:

- $C-A=\boldsymbol{v}$,
- $B-A=\boldsymbol{u}$,

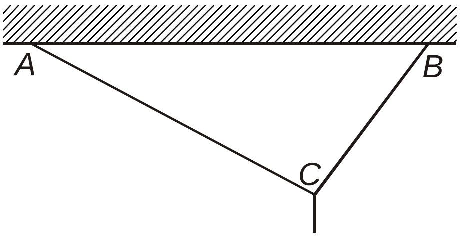
platí tedy i $C-B=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$.



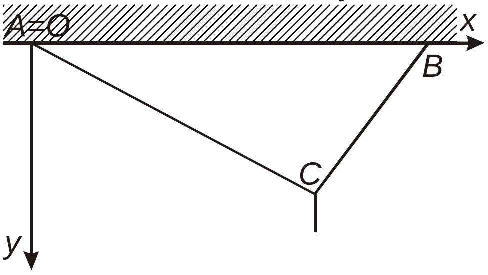
Vyjádříme si druhou mocninu vektoru $C-B$:
$|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}|^2=|\boldsymbol{u}|^2+|\boldsymbol{v}|^2-2\boldsymbol{uv}$ (tuto rovnost jsme používali při důkazu vzorce pro skalární součin).
Pro skalární součin platí: $\boldsymbol{uv}=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\alpha$.
Dosadíme: $|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}|^2=|\boldsymbol{u}|^2+|\boldsymbol{v}|^2-2\boldsymbol{uv}=|\boldsymbol{u}|^2+|\boldsymbol{v}|^2-2|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\alpha$.
Věta je dokázána, výsledek bude přehlednější, když velikosti vektorů napíšeme jako velikosti stran:
$$\begin{array}{ccccc} |\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}|^2 &= |\boldsymbol{u}|^2 &+ |\boldsymbol{v}|^2 &- 2|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\alpha \\ a^2 &= c^2 &+ b^2 &- 2\cdot c\cdot b\cos\alpha \end{array}.$$

Pomocí vektorů se řeší i fyzikální příklady z praxe:
Na stropě tovární haly jsou zabudovány dva háky ve vzdálenosti 10,5 m od sebe. Na jednom z háků je zavěšeno lano dlouhé 8,5 m, na druhém lano dlouhé 5m. Volné konce obou lan jsou spojeny a v tomto místě je zavěšena kladka. Jakou maximální hmotnost může mít předmět zavěšený na kladku, pokud mají obě lana nosnost 10 t?

Př. 2: Nakresli schématický náčrtek situace. Bod, ve kterém je zavěšeno delší lano označ *A*, bod zavěšení druhého lana *B*, bod ve kterým jsou lana spojena označ *C*. Navrhni umístění souřadné soustavy, které by ulehčilo následující výpočet.



Soustavu souřadnic zvolíme tak, aby co největší počet souřadnic bodů, které nás zajímají, byl nulový $\Rightarrow$ například tak, aby počátek soustavy souřadnic byl v bodě *A*, osa *x* směřovala vodorovně k bodu *B* a osa *y* směřovala kolmo dolů.

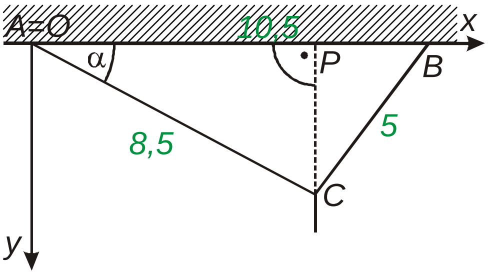


Př. 3: Urči souřadnice bodů *A*, *B*, *C*.

$A[0;0]$ - bod je shodný s počátkem soustavy souřadnic

$B[10,5;0]$ - bod leží na ose *x*, 10,5 m od bodu *A* (a tedy i od počátku)

Souřadnice bodu *C* musíme určit pomocí trojúhelníku *ABC*. Patu výšky v_c označíme *P*.



Určíme úhel α pomocí kosinové věty: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8,5^2 + 10,5^2 - 5^2}{2 \cdot 8,5 \cdot 10,5} = 0,49 \Rightarrow \alpha = 28°4'$$

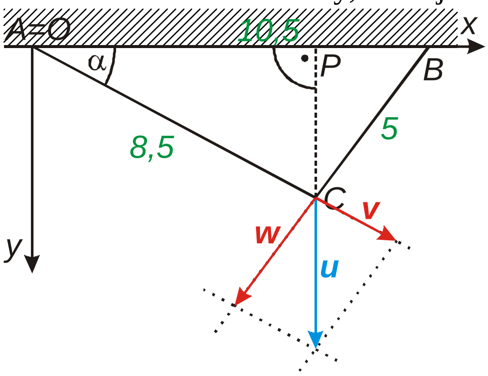
Vzdálenosti $|AP|$ a $|CP|$ určíme z pravoúhlého trojúhelníku *APC*:

- $\cos\alpha = \frac{|AP|}{|AC|} \Rightarrow |AP| = |AC|\cos\alpha = 8,5 \cdot \cos 28°4' = 7,5$,
- $\sin\alpha = \frac{|CP|}{|AC|} \Rightarrow |CP| = |AC|\sin\alpha = 8,5 \cdot \sin 28°4' = 4$,

$\Rightarrow$ $C[7,5;4]$.

Můžeme pokračovat v řešení příkladu.

Sílu, kterou působí náklad na kladku, můžeme znázornit svislým vektorem $\boldsymbol{u}$. Tento vektor lana rozloží na dva vektory, které jsou rovnoběžné s jejich směry.



Platí:

- $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ - vektor $\boldsymbol{u}$ je součtem vektorů $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$,
- $\boldsymbol{v} = k(C - A)$ - vektor $\boldsymbol{v}$ je rovnoběžný s vektorem $C - A$,
- $\boldsymbol{w} = l(C - B)$ - vektor $\boldsymbol{w}$ je rovnoběžný s vektorem $C - B$.

Př. 4: Urči souřadnice vektorů $C - A$, $C - B$ a $\boldsymbol{u}$.

$C - A = (7,5;4)$ $\qquad$ $C - B = (-3;4)$

$\boldsymbol{u} = (0;x)$ $\qquad$ x je maximální hmotnost, kterou můžeme na lana pověsit.

Dosadíme do rovnice $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$: $\boldsymbol{u} = k(C - A) + l(C - B)$.

Dosadíme souřadnice: $(0;x) = k(7,5;4) + l(-3;4)$.

Získáváme soustavu: $\begin{matrix} 7,5k - 3l = 0 \\ 4k + 4l = x \end{matrix}$.

Z první rovnice dosadíme do druhé: $k = \frac{6}{15} l$.

$$4 \cdot \frac{6}{15} l + 4l = x$$

$$\frac{28}{5} l = x$$

$$l = \frac{5x}{28} \qquad k = \frac{6}{15} \frac{5x}{28} = \frac{x}{14}.$$

Určíme velikosti vektorů $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$:

- $|\boldsymbol{v}| = |k||C - A| = \frac{x}{14} 8,5 = \frac{17}{28} x$,
- $|\boldsymbol{w}| = |l||C - B| = \frac{5x}{28} 5 = \frac{25}{28} x$.

Nosnost obou lan je 10 tun $\Rightarrow$

- $|\boldsymbol{v}| = \frac{17}{28} x \leq 10 \Rightarrow x \leq 16,5$,
- $|\boldsymbol{w}| = \frac{25}{28} x \leq 10 \Rightarrow x \leq 11,2$,

$\Rightarrow$ hmotnost předmětu musí vyhovovat přísnější podmínce $\Rightarrow$ na kladku je možné zavěsit maximálně 11,2 tuny.

Shrnutí: Analyticky je možné překvapivě jednoduše dokázat některé planimetrické nebo goniometrické věty.