

7.2.12 Vektorový součin I

Předpoklady: 7208, 7211

Při násobení dvou čísel získáváme opět číslo. Skalární násobení vektorů je zcela odlišné, protože vynásobením dvou vektorů dostaneme číslo, tedy něco jiného.

Je možné vynásobit dva vektory a získat opět vektor? Co by takové násobení muselo pro výsledek určit?

Takové násobení musí jednoznačně určit výsledný vektor, tedy jednak velikost (jako u násobení čísel a skalárního násobení vektorů) a poté směr (to je novinka).

Takový postup existuje a nazývá se **vektorový součin**.

Nejdříve si řekneme jeho význam a pak se ho naučíme počítat pomocí souřadnic.

Př. 1: Rozhodni, zda následující definice může být použita jako definice vektorového součinu dvou vektorů:

Vektorový součin dvou vektorů, které leží na jedné přímce, je nulový vektor.

Vektorový součin dvou vektorů u , v , které neleží na jedné přímce, je vektor w , který má tyto vlastnosti:

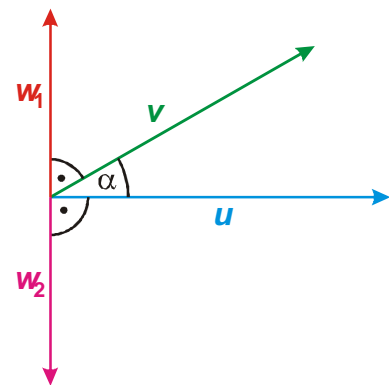
Vektor w je kolmý k oběma vektorům u , v .

Platí: $|w| = |u||v| \sin \alpha$, kde α je úhel vektorů u a v .

Vektorový součin w vektorů u a v značíme $u \times v$, tedy $w = u \times v$.

Předchozí definice není správná. Vektor w podle ní není určen jednoznačně.

Pokud by vektory u a v ležely ve vodorovné rovině, mohl by výsledný vektor w směřovat buď svisle vzhůru nebo svisle dolů



\Rightarrow Do definice musíme doplnit pravidlo, které by jednu z možností zakázalo \Rightarrow například, že vektory tvoří pravotočivou bázi.

Správná definice vektorového součinu.

Vektorový součin dvou vektorů, které leží na jedné přímce, je nulový vektor.

Vektorový součin dvou vektorů u , v , které neleží na jedné přímce, je vektor w , který má tyto vlastnosti:

- Vektor w je kolmý k oběma vektorům u , v .
- Vektory u , v , w tvoří pravotočivou bázi.

- Platí: $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin \alpha$, kde α je úhel vektorů \mathbf{u} a \mathbf{v} .

Vektorový součin \mathbf{w} vektorů \mathbf{u} a \mathbf{v} značíme $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, tedy $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Upozornění: Existují dva způsoby násobení vektorů:

- skalární součin (výsledek číslo) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$,
- vektorový součin (výsledek vektor) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$,

\Rightarrow proto při zápisu záleží na tom, který znak píšeme. Při jeho záměně totiž počítáme něco úplně jiného.

Pedagogická poznámka: Předchozí upozornění není zbytečné. Studenti oba typy v zápisu často zaměňují (a dělají to bohužel i po upozornění).

Př. 2: Rozhodni, zda je vektorové násobení komutativní.

Vektorové násobení není komutativní, pokud prohodíme pořadí vektorů \mathbf{u} a \mathbf{v} , obrátí se směr výsledného vektoru \mathbf{w} .

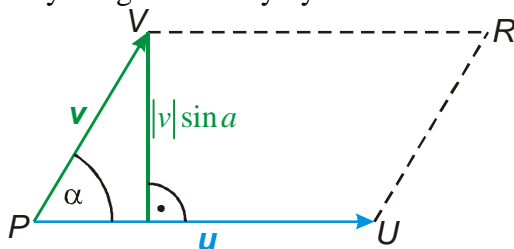
Pro každé vektory \mathbf{u} , \mathbf{v} platí $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Př. 3: Navrhni důvod, proč je vektorovým součinem vektorů ležících na jedné přímce nulový vektor.

Směrů kolmých k jedné přímce je v prostoru nekonečně mnoho \Rightarrow vektorový součin by nebyl jednoznačně určitelný.

Pro vektory na jedné přímce platí: $\alpha = 0 \Rightarrow |\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin \alpha = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin 0 = 0$.

Podíváme se na velikost vektorového součinu $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin \alpha \Rightarrow$ "opačný" vzorec než u skalárního součinu, čím větší úhel mezi vektory, tím větší výsledek vektorového součinu. Jaký má geometrický význam?



Geometrický význam: součin $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin \alpha$ udává obsah rovnoběžníku $PURV$.

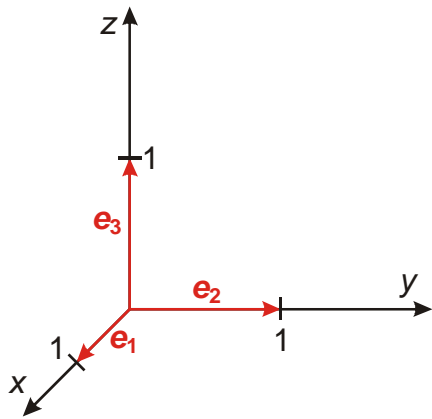
Př. 4: Pomocí geometrického významu čísla $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin \alpha$ rozhodni, jak se změní vektorový součin pokud:

- a) k vektoru \mathbf{v} přičteme násobek vektoru \mathbf{u} ,
- b) pokud jeden z vektorů vynásobíme reálným číslem k .

a) k vektoru \mathbf{v} přičteme násobek vektoru \mathbf{u}

Vektorový součin se nezmění, protože se nezmění ani obsah rovnoběžníku $PURV$.

Př. 6: Nakresli obrázek kartézské soustavy souřadnic $Oxyz$ a vyznač do ní vektory e_1 , e_2 a e_3 .



Př. 7: Urči vektorové součiny.

$$e_1 \times e_1 =$$

$$e_1 \times e_2 =$$

$$e_1 \times e_3 =$$

$$e_2 \times e_1 =$$

$$e_2 \times e_2 =$$

$$e_2 \times e_3 =$$

$$e_3 \times e_1 =$$

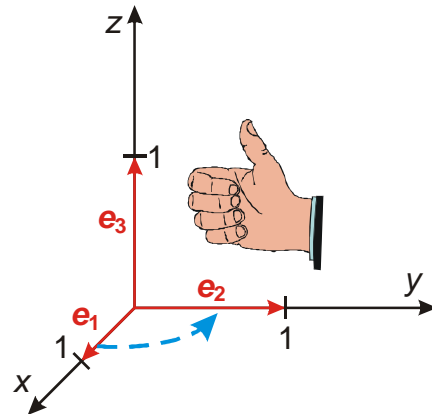
$$e_3 \times e_2 =$$

$$e_3 \times e_3 =$$

$e_1 \times e_1$: součin dvou stejných (rovnoběžných) vektorů $\Rightarrow e_1 \times e_1 = \mathbf{o}$.

$e_1 \times e_2$: dva různoběžné vektory \Rightarrow jejich vektorový součin je nenulový,

- velikost: $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin \alpha = |e_1||e_2|\sin 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow$ půjde opět o jednotkový vektor,

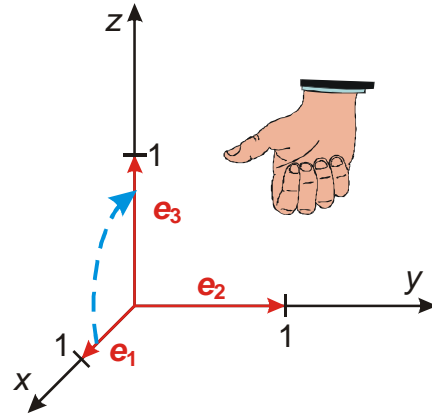


- směr: vektory e_1, e_2, \mathbf{w} tvoří pravotočivou bázi:

vektor \mathbf{w} má stejný směr jako osa $z \Rightarrow$ hledaným vektorem je vektor e_3 (má jednotkovou velikost a směr osy z) $\Rightarrow e_1 \times e_2 = e_3$.

$e_1 \times e_3$: dva různoběžné vektory \Rightarrow jejich vektorový součin je nenulový,

- velikost: $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin \alpha = |e_1||e_3|\sin 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow$ půjde opět o jednotkový vektor,



- směr: vektory e_1, e_3, w tvoří pravotočivou bázi:
vektor w má opačný směr než osa $y \Rightarrow$ hledaným vektorem je vektor $-e_2$ (má jednotkovou velikost a směr opačný k ose osy y) $\Rightarrow e_1 \times e_3 = -e_2$.

Stejným způsobem určíme ostatní součiny.

$$\begin{array}{lll}
 e_1 \times e_1 = \mathbf{o} & e_1 \times e_2 = e_3 & e_1 \times e_3 = -e_2 \\
 e_2 \times e_1 = -e_3 & e_2 \times e_2 = \mathbf{o} & e_2 \times e_3 = e_1 \\
 e_3 \times e_1 = e_2 & e_3 \times e_2 = -e_1 & e_3 \times e_3 = \mathbf{o}.
 \end{array}$$

Pedagogická poznámka: Součin $e_1 \times e_1$ určí studenti většinou sami, součin $e_1 \times e_2$ je potřeba většině z nich ukázat (proto s ním u tabule příliš nečekám), zbytek pak již dopočítají. Někteří mají potíže se znaménky.

Například vektor $u = (2; 3; -1)$ můžeme napsat jako $u = 2 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 - 1 \cdot e_3$.

Vyjádříme vektory a a b pomocí vektorů e_1, e_2, e_3 .

$$a = (a_1; a_2; a_3) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$b = (b_1; b_2; b_3) = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

Teď oba vektory vynásobíme a použijeme pravidla na roznásobení.

$$a \times b = (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \times (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) =$$

$$a_1 e_1 \times b_1 e_1 + a_2 e_2 \times b_1 e_1 + a_3 e_3 \times b_1 e_1$$

$$a_1 e_1 \times b_2 e_2 + a_2 e_2 \times b_2 e_2 + a_3 e_3 \times b_2 e_2$$

$$a_1 e_1 \times b_3 e_3 + a_2 e_2 \times b_3 e_3 + a_3 e_3 \times b_3 e_3$$

Přerovnáme pořadí čísel a vektorů v součinech.

$$a_1 b_1 (e_1 \times e_1) + a_2 b_1 (e_2 \times e_1) + a_3 b_1 (e_3 \times e_1)$$

$$a_1 b_2 (e_1 \times e_2) + a_2 b_2 (e_2 \times e_2) + a_3 b_2 (e_3 \times e_2)$$

$$a_1 b_3 (e_1 \times e_3) + a_2 b_3 (e_2 \times e_3) + a_3 b_3 (e_3 \times e_3) =$$

Spočítáme vektorové součiny v závorkách (podle tabulky výše).

$$a_1 b_1 \mathbf{o} + a_2 b_1 (-\mathbf{e}_3) + a_3 b_1 \mathbf{e}_2$$

$$a_1 b_2 \mathbf{e}_3 + a_2 b_2 \mathbf{o} + a_3 b_2 (-\mathbf{e}_1)$$

$$a_1 b_3 (-\mathbf{e}_2) + a_2 b_3 \mathbf{e}_1 + a_3 b_3 \mathbf{o}$$

Dáme k sobě násobky stejných vektorů.

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3$$

Teď už můžeme snadno určit souřadnice vektoru $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2; a_3 b_1 - a_1 b_3; a_1 b_2 - a_2 b_1)$.

Př. 8: Vzorec pro výpočet vektorového součinu ze souřadnic je velmi složitý. Zkus najít mnemotechnickou pomůcku pro jeho zapamatování.

Řešení na začátku příští hodiny.

Pedagogická poznámka: Předchozí odvození samozřejmě nezkouším a může se zdát zbytečné (vektorové součiny budou studenti v příští hodině počítat samozřejmě jinak). Na druhou stranu pokud ho studenti dělají sami a neopisují ho z tabule je to krásný příklad zdlouhavého výpočtu náročného na přesnost. Pokud odvození nestihneme dopočítat do konce, nic se neděje. Příští hodinu se k němu nevracíme, jenom ho ukážu s projektoru. Kdo o něj stojí dodělá si ho sám, pro ostatní velkou cenu nemá.

Shrnutí: Vektorovým součinem dvou nerovnoběžných vektorů získáme vektor na oba kolmý.