7.2.13 Vektorový součin II

Předpoklady: 7212

V minulé hodině jsme skončili vzorcem pro výpočet vektorového součinu ze souřadnic vektorů $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$.

Jeden z nejhorších vzorců na zapamatování $\Rightarrow$ naštěstí jsou v něm určité pravidelnosti $\Rightarrow$ dají se najít nějaké mnemotechnické pomůcky.

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array}$$

Šipka znamená součin čísel, které spojuje, šipky dolů jsou kladné, šipky nahoru záporné $\Rightarrow$

$a \times b = (a_2b_3 - b_2a_3; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - b_1a_2)$.

Pedagogická poznámka: Při hodině nechávám studenty samostatně napsat už poslední souřadnici z předchozího součinu. Součin s konkrétními čísly pak studenti zkouší počítat sami. Občas se někomu podaří spočítat vektorový součin jako jedno číslo, pak nezbývá než se vrátit k tomu, že by každý měl mít základní očekávání toho, jak bude výsledek vypadat, což v případě vektorového součinu znamená trojici čísel.

Tento způsob zápisu je výhodnější nejen pro zapamatování vzorce, ale i pro výpočet vektorového součinu konkrétních vektorů.

Spočteme vektorový součin $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ vektorů $\boldsymbol{a} = (1; 2; -3)$ a $\boldsymbol{b} = (2; -3; 0)$.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -3 \end{array}$$

$a \times b = (2 \cdot 0 - (-3)(-3); (-3)2 - 0 \cdot 1; 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 2) = (-9; -6; -7)$

Poznámka: Pomůcek pro zápis vektorového součinu je samozřejmě víc. Autor sám používá tento a zdá se mu, že studentům činí jen velmi malé potíže s ním pracovat. Tím nijak nevylučuje používání jiných metod, sám jenom nabízí to, co se mu zdá nejlepší.

Pedagogická poznámka: Setkal jsem se i s tím, že žák pomocí schématu generoval vzorec a pak do něj dosazoval konkrétní čísla. Čím dřív se podaří takové postupy odchytit, tím lépe.

Př. 1: Vypočti vektorový součin vektorů:

a) $\boldsymbol{a} = (-2; 1; 3)$ $\boldsymbol{b} = (1; 2; 3)$ b) $\boldsymbol{a} = (1; 2; 3)$ $\boldsymbol{b} = (-2; 1; 3)$

c) $\boldsymbol{a} = (-2; 3; 1)$, $\boldsymbol{b} = (4; -6; -2)$

Výsledky zkontroluj pomocí vlastností vektorového součinu.

a) $\boldsymbol{a} = (-2; 1; 3)$ $\boldsymbol{b} = (1; 2; 3)$

$$\begin{array}{ccccc} -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (1\cdot 3 - 3\cdot 2; 3\cdot 1 - (-2)3; (-2)2 - 1\cdot 1) = (-3; 9; -5)$

b) $\boldsymbol{a} = (1;2;3)$ $\boldsymbol{b} = (-2;1;3)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (2\cdot 3 - 3\cdot 1; 3\cdot(-2) - 1\cdot 3; 1\cdot 1 - 2\cdot(-2)) = (3; -9; 5)$

V příkladech a) a b) vyšly navzájem opačné vektory, protože jsme násobili v obou případech stejné vektory, ale v opačném pořadí.

c) $\boldsymbol{a} = (-2;3;1)$, $\boldsymbol{b} = (4;-6;-2)$

$$\begin{array}{ccccc} -2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & -6 & -2 & 4 & -6 \end{array}$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (3\cdot(-2) - 1\cdot(-6); 1\cdot 4 - (-2)(-2); (-2)(-6) - 3\cdot 4) = (0;0;0)$

V příkladu c) vyšel nulový vektor, protože platí: $\boldsymbol{b} = (-2)\boldsymbol{a}$ $\Rightarrow$ násobíme dva vektory, které leží na jedné přímce.

Př. 2: Zapiš všechny vektory, kterou jsou kolmé zároveň na vektor $\boldsymbol{u} = (2;0;1)$ a $\boldsymbol{v} = (-1;1;5)$.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & -1 & 1 \end{array}$$

$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = (0\cdot 5 - 1\cdot 1; 1\cdot(-1) - 5\cdot 2; 2\cdot 1 - (-1)\cdot 0) = (-1; -11; 2)$

Podmínku splňují i všechny další vektory, které jsou s vektorem $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ rovnoběžné $\Rightarrow$ řešením jsou všechny vektory $k(-1;-11;2)$, kde $k \in R - \{0\}$.

Př. 3: Najdi vektor $\boldsymbol{c}$ tak, aby byl kolmý na vektory $\boldsymbol{a} = (1;0;1)$ a $\boldsymbol{b} = (1;2;2)$ a platilo $|\boldsymbol{c}| = 6$.

Vektor $\boldsymbol{c}$ je kolmý na vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ $\Rightarrow$ je rovnoběžný s vektorovým součinem těchto vektorů $\Rightarrow$ spočteme vektorový součin a pak ho vynásobíme vhodným číslem, aby měl požadovanou velikost.

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (0\cdot 2 - 2\cdot 1; 1\cdot 1 - 2\cdot 1; 1\cdot 2 - 1\cdot 0) = (-2; -1; 2)$

$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$

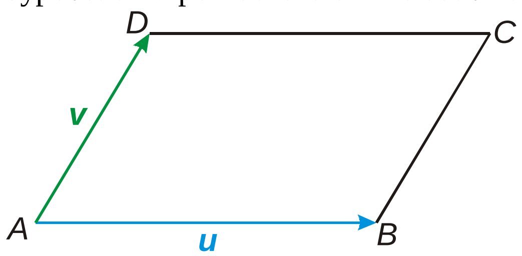
$\Rightarrow$

- $\boldsymbol{c}_1 = 2\cdot\boldsymbol{u} \Rightarrow \boldsymbol{c}_1 = 2(-2;-1;2) = (-4;-2;4)$
- $\boldsymbol{c}_2 = (-2)\cdot\boldsymbol{u} \Rightarrow \boldsymbol{c}_2 = (-2)(-2;-1;2) = (4;2;-4)$

Pedagogická poznámka: Hodinu řídím tak, aby se na následujícím příkladu synchronizovala třída tak 15 minut před koncem hodiny.

Př. 4: Urči obsah rovnoběžníku *ABCD* pokud platí: $A[-1;-2;1]$, $B[2;0;2]$, $C[1;1;-1]$.

Obsah rovnoběžníku *ABCD* můžeme určit z velikostí stran rovnoběžníku a úhlu, který svírají, vzorcem $|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|\cdot\sin\alpha \Rightarrow$ poměrně dlouhé počítání (určení vektorů, spočtení jejich velikostí, výpočet úhlu pomocí skalárního součinu, dosazení do vztahu).



Nápad: výraz $|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|\cdot\sin\alpha$ známe z definice vektorového součinu (jde o jeho velikost $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|\cdot\sin\alpha$) $\Rightarrow$ rychlejší postup: určíme vektory ***u*** a ***v***, určíme jejich vektorový součin $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ a jeho velikost $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|$ se rovná obsahu obdélníku.

Souřadnice vektorů:

$\boldsymbol{u} = B - A = (3;2;1)$

$\boldsymbol{v} = C - B = (-1;1;-3)$ (souřadnice bodu *D* neznáme, nemůžeme ho určit jako $D - A$)

$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = (2\cdot(-3)-1\cdot 1;1\cdot(-1)-(-3)\cdot 3;3\cdot 1-(-1)\cdot 2) = (-7;8;5)$

Velikost vektoru $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}| = \sqrt{(-7)^2+8^2+5^2} = \sqrt{138} \doteq 11{,}75$.

Pedagogická poznámka: Samostatné vyřešení příkladu je spíše vzácností. Je třeba rozbor neodbýt, protože velká většina žáků si teprve v tomto okamžiku všimne, že velikost vektorového součinu má nějaký význam.

Př. 5: Urči obsah trojúhelníku *ABC* pokud platí: $A[-2;-2]$, $B[3;-1]$, $C[1;4]$.

Dva problémy:

- vektorový součin určuje obsah rovnoběžníku, pro trojúhelník platí: $S = \dfrac{bc\sin\alpha}{2} \Rightarrow$ spočteme vektorový součin a jeho velikost vydělíme dvěma,
- vektorový součin je určen pouze pro vektory v prostoru, příklad je však zadán v rovině (spočítat jít musí, protože smysl má, navíc každou rovinu si můžeme představit umístěnou v prostoru) $\Rightarrow$ přidáme k souřadnicím bodů třetí souřadnici (vždy stejnou, nejlépe nulovou).

Body v prostoru: $A[-2;-2;0]$, $B[3;-1;0]$, $C[1;4;0]$.

Vektory: $\boldsymbol{b} = B - A = (5;1;0)$, $\boldsymbol{c} = C - A = (3;6;0)$.

Vektorový součin: $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = (1\cdot 0-6\cdot 0;0\cdot 3-0\cdot 5;5\cdot 6-3\cdot 1) = (0;0;27)$.

Velikost vektorového součinu: $|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}| = \sqrt{0^2+0^2+27^2} = 27$.

Obsah trojúhelníku: $S=\frac{|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|}{2}=\frac{27}{2}=13,5$.
Trojúhelník má obsah 13,5.

Dodatek: Když si uvědomíme, že body *A*, *B*, *C* určují rovinu, ve které leží trojúhelník *ABC*, je jasné, že vektorový součin musí ležet ve směru na tuto rovinu kolmém a tedy ve směru, který jsme přidávali $\Rightarrow$ jedinou jeho nenulovou souřadnicí bude *z*-ová.

Př. 6: Petáková:
strana 103/cvičení 46 b)
strana 103/cvičení 47 a)
strana 103/cvičení 48 c)
strana 103/cvičení 50
strana 103/cvičení 51
strana 103/cvičení 53

Shrnutí: Ze souřadnic vypočítáme vektorový součin pomocí schématu.