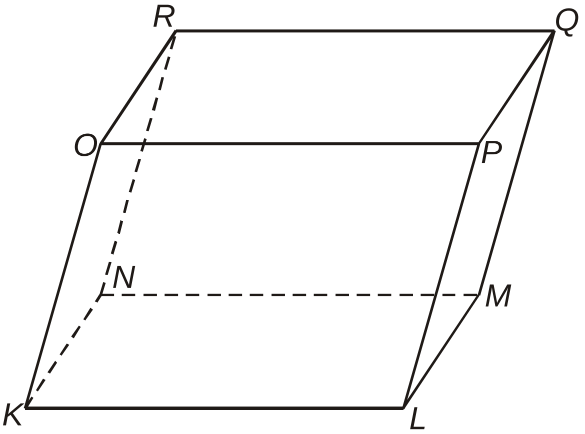
7.2.14 Smíšený součin

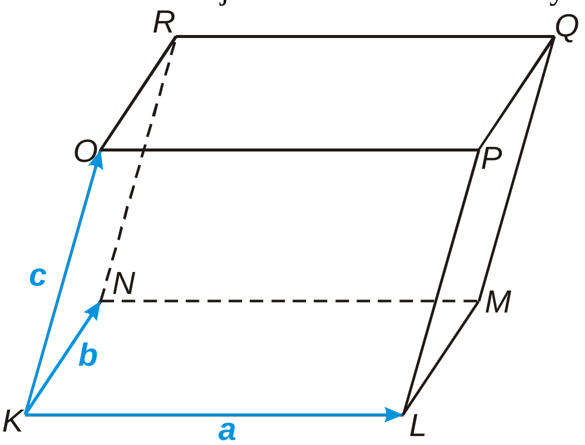
Předpoklady: 7213

Je dán rovnoběžnostěn *KLMNOPQR*.



Jeho objem umíme spočítat stereometrickým vzorcem: $V = S_p v$.

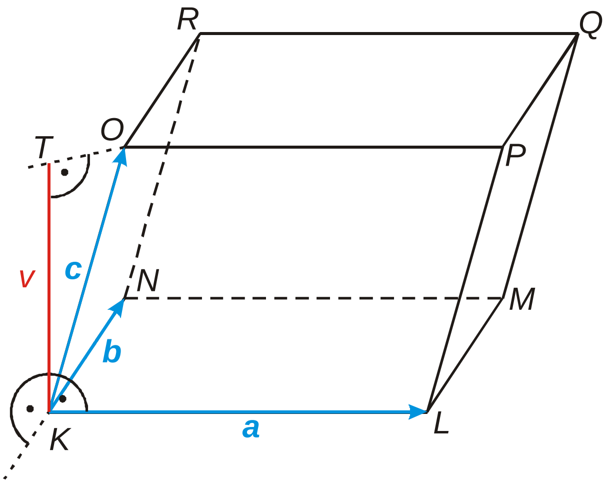
Rovnoběžnostěn je také určen třemi vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$:



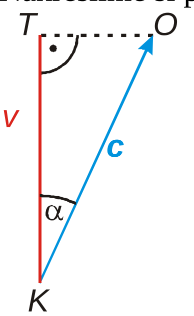
$\Rightarrow$ jeho objem musí jít spočítat i pomocí těchto tří vektorů.

První krok už víme: $S_p = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ (velikost vektorového součinu $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ se rovná obsahu rovnoběžníku *ABCD* – vlastnost vektorového součinu) $\Rightarrow V = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| \cdot v$.

Musíme určit výšku (kolmou vzdálenost mezi rovinami *KLMN* a *OPQR*) pomocí vektoru $\boldsymbol{c}$.



Nakreslíme si pravoúhlý trojúhelník *KOT*.



Pro úhel α platí: $\cos\alpha = \dfrac{v}{|\boldsymbol{c}|} \Rightarrow v = \cos\alpha \cdot |\boldsymbol{c}|$

Dosadíme: $V = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| \cdot v = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| \cdot |\boldsymbol{c}| \cos\alpha$.

Postřeh: Výsledek připomíná pravou stranu vzorce pro skalární součin $\boldsymbol{uv} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\varphi$ (součin velikostí dvou vektorů $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ a $|\boldsymbol{c}|$ a kosinu nějakého úhlu). Je úhel α úhlem, který svírají vektory $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$?

Přímka *KT* je kolmá na rovnoběžník *KLMN* $\Rightarrow$ má stejný směr jako vektor $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ $\Rightarrow$ úhel α je úhel mezi vektory $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ $\Rightarrow$ vztah $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| \cdot |\boldsymbol{c}| \cos\alpha$ je vztah pro výpočet skalárního součinu vektorů $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ a $|\boldsymbol{c}|$ z velikosti vektorů $\Rightarrow$ $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| \cdot |\boldsymbol{c}| \cos\alpha = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$.

$\Rightarrow$ Jsme hotoví: Objem rovnoběžnostěnu můžeme vypočítat pomocí vektorů ***a***, ***b*** a ***c*** podle vztahu: $V = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$.

Malý zádrhel:

Vektory ***a***, ***b*** a ***c*** na našem obrázku tvoří pravotočivou bázi $\Rightarrow$ proto směřuje vektor $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ do stejného poloprostoru jako vektor ***c***.

Kdyby vektory ***a***, ***b*** a ***c*** tvořily levotočivou bázi, vektor $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ by směřoval do opačného poloprostoru než vektor ***c*** $\Rightarrow$ výsledek by byl záporný $\Rightarrow$ museli bychom z něj udělat absolutní hodnotu, abychom získali kladné číslo.

Objem rovnoběžnostěnu, který je určen vektory *a, b* a *c* určíme ze vzorce $V = |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}|$ (absolutní hodnota řeší případné problémy s mínusem).

Číslo $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ nazýváme smíšený součin vektorů *a, b, c*.

Př. 1: Rozhodni, kdy se smíšený součin tři nenulových vektorů ***a***, ***b***, ***c*** rovná nule.

Dvě možnosti řešení.

a) z vlastností skalárního a vektorového součinu

Skalární součin se rovná nule:

- jeden z vektorů je roven nule $\Rightarrow$ vektor $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ je nulový $\Rightarrow$ vektory ***a*** a ***b*** jsou rovnoběžné,
- vektory jsou na sebe kolmé $\Rightarrow$ vektor ***c*** je kolmý na vektor $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ $\Rightarrow$ vektor ***c*** leží v rovině určené vektory ***a*** a ***b***.

$\Rightarrow$ Smíšený součin je nulový, právě když vektory ***a***, ***b***, ***c*** leží v jedné rovině (jsou lineárně závislé).

b) z významu smíšeného součinu

Absolutní hodnota smíšeného součinu se rovná objemu rovnoběžnostěnu. Objem je nulový, když vektory ***a***, ***b***, ***c*** neurčují rovnoběžnostěn $\Rightarrow$ pokud vektory ***a***, ***b***, ***c*** leží v jedné rovině.

Př. 2: Objem rovnoběžnostěnu nezávisí na tom, kterou ze stěn zvolíme za podstavu. Které další smíšené součiny můžeme použít pro výpočet jeho objemu (a rovnají se součinu $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$)?

Za podstavu volíme obdélník *KNRO* $\Rightarrow$ $V=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$.

Za podstavu volíme obdélník *KLPO* $\Rightarrow$ $V=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$.

Pro každé tři vektory ***a***, ***b***, ***c*** v prostoru platí: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$.

Dodatek: Pomocí předchozí rovnosti se dokazuje distributivnost vektorového součinu a jeho asociativnost při násobení reálným číslem.

Máme smíšený součin libovolných vektorů ***a***, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{x}$.

$(\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}])\cdot\boldsymbol{x}$

Provedeme posunutí vektorů podle vzorce $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$:

$(\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}])\cdot\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a})\cdot[\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}]$,

skalární součin je distributivní: $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a})\cdot[\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}$,

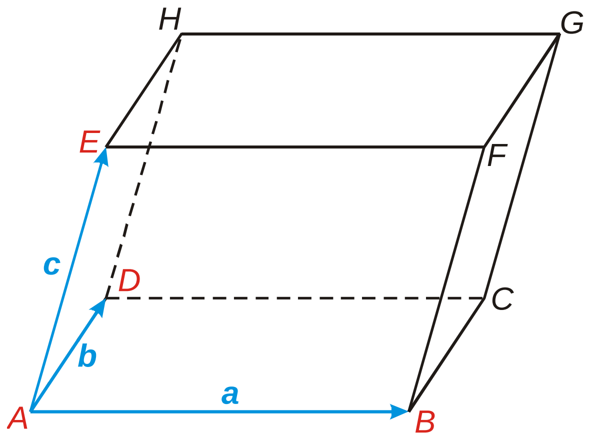
provedeme posunutí vektorů podle vzorce $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$:

$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{x}$,

vytkneme ***x***: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{x}$.

Platí tedy: $(\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}])\cdot\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{x}$ a tedy $\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}]=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ - vektorový součin je distributivní vzhledem ke sčítání vektorů.

Př. 3: Jsou dány body $A[1;0;1]$, $B[3;-1;4]$, $D[2;2;2]$ a $E[-1;3;5]$. Urči objem rovnoběžnostěnu *ABCDEFGH*.



Nejdříve určíme vektory ***a***, ***b***, ***c***.

Z obrázku je vidět: $\boldsymbol{a} = B - A = (2;-1;3)$, $\boldsymbol{b} = D - A = (1;2;1)$, $\boldsymbol{c} = E - A = (-2;3;4)$

Počítáme smíšený součin $V = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (-1-6;3-2;4+1) = (-7;1;5)$

$V = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = (-7;1;5)(-2;3;4) = 14+3+20 = 37$

Rovnoběžnostěn má objem 37.

Dodatek: Další možné postupy výpočtu.

$V = (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (8-3;-2-4;3+4) = (5;-6;7)$

$V = (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a} = (5;-6;7)(2;-1;3) = 10+6+21 = 37$

nebo $(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a} = (9+4;8+6;2-6) = (13;14;-4)$

$V = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = (13;14;-4)(1;2;1) = 13+28-4 = 37$

Pedagogická poznámka: V hodině si rozdělíme postupy tak, aby podle každé ze tří uvedených možností $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$ počítal alespoň někdo a mohli jsme si srovnat výsledky. Pokud máte nějaké opravdové experimentátora, můžete ho nechat proházet vrcholy, nechat příklad spočítat proházený a pak vysvětlit výsledek.

Př. 4: Jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (1;2;3)$, $\boldsymbol{v} = (1;1;1)$ a $\boldsymbol{w} = (1;3;1)$. Rozhodni, zda vektory ***u***, ***v***, ***w*** leží v jedné rovině. Pokud v jedné rovině neleží, rozhodni, zda tvoří levotočivou nebo pravotočivou bázi.

Spočteme smíšený součin vektorů ***u***, ***v***, ***w*** a z hodnoty výsledku budeme moci odpovědět na otázky.

$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = (2-3;3-1;1-2) = (-1;2;-1)$

$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} = (-1;2;-1)\cdot(1;3;1) = -1+6-1 = 4$

Smíšený součin vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ je kladné číslo $\Rightarrow$

- vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ neleží v jedné rovině (výsledek není nula),
- vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ tvoří pravotočivou bázi (výsledek je kladný).

Př. 5: Je dán čtyřstěn *ABCD*, $A[-2;-1;-2]$, $B[1;4;0]$, $C[1;1;3]$ a $D[2;5;3]$. Urči:
a) obsah stěny *BCD*, b) délku výšky v_D v této stěně,
c) objem čtyřstěnu, d) délku výšky čtyřstěnu kolmé na stěnu *BCD*.

a) obsah stěny *BCD*
Využijeme velikost vektorového součinu vektorů dvou stran trojúhelníku, který stěnu tvoří.

$\boldsymbol{u} = C - B = (0;-3;3)$ $\boldsymbol{v} = D - B = (1;1;3)$

$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = (-9-3;3-0;0+3) = (-12;3;3)$

$|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}| = \sqrt{(-12)^2+3^2+3^2} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$

Stěnu tvoří trojúhelník, má tedy poloviční obsah než je velikost vektorového součinu $\Rightarrow$

$S_{BCD} = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$.

b) délka výšky v_D ve stěně *BCD*

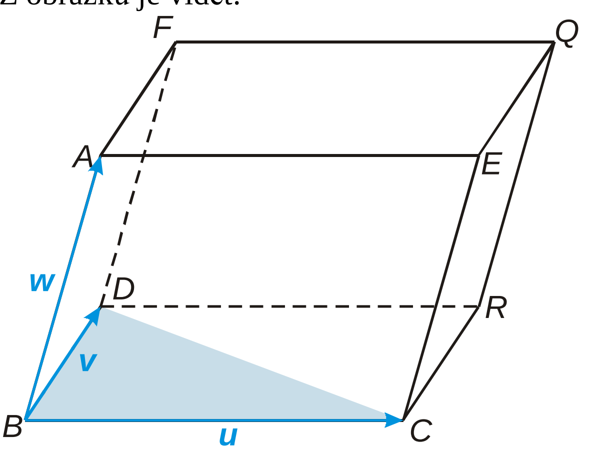
Obsah trojúhelníku můžeme určit planimetricky vztahem $S = \dfrac{av_a}{2} \Rightarrow v_a = \dfrac{2S}{a}$.

Výška v_D je kolmá na stranu *BC*. Určíme její délku, obsah trojúhelníku známe.

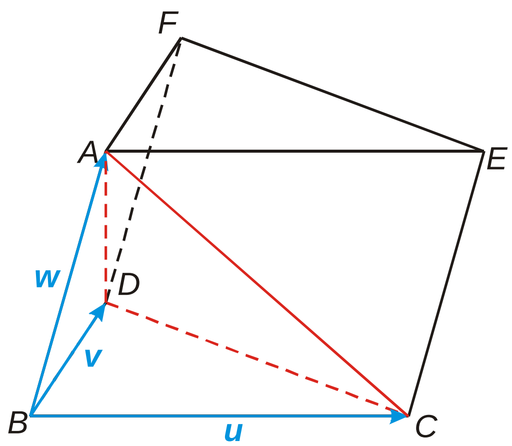
$|BC| = |\boldsymbol{u}| = \sqrt{0^2+(-3)^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$$v_D = \frac{2S_{BCD}}{|BC|} = \frac{2\cdot\dfrac{9\sqrt{2}}{2}}{3\sqrt{2}} = 3$$

c) objem čtyřstěnu
Z obrázků je vidět:



Obsah trojúhelníku *BCD* je polovinou obsahu odpovídajícího rovnoběžníku *BCRD*.



Objem čtyřstěnu *BCDA* je třetinou objemu odpovídajícího hranolu *BCDAEF* (obecné pravidlo pro objem jehlanu).

$\Rightarrow$ Objem čtyřstěnu je šestinou smíšeného součinu $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}$.

$\boldsymbol{w} = A - B = (-3;-3;-2)$

$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} = (-12;3;3)(-3;-3;-2) = 36-9-6 = 21$

Objem čtyřstěnu $ABCD$ je $\frac{21}{6}$.

d) délku výšky čtyřstěnu kolmé na stěnu BCD

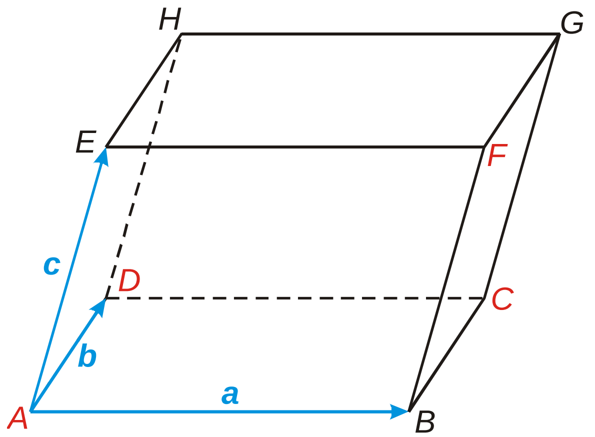
Objem čtyřstěnu můžeme také spočítat stereometricky vztahem $V = \frac{1}{3}S_p v \Rightarrow v = \frac{3V}{S_p}$.

Objem čtyřstěnu i obsah podstavy BCD známe. Dosadíme:

$$v = \frac{3V}{S_p} = \frac{3\frac{21}{6}}{\frac{9\sqrt{2}}{2}} = \frac{21}{9\sqrt{2}} = \frac{7}{3\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{6}.$$

Výška čtyřstěnu kolmá na stěnu BCD má délku $\frac{7\sqrt{2}}{6}$.

Př. 6: Jsou dány body $A[2;-2;1]$, $C[-1;1;3]$, $D[3;2;2]$ a $F[-3;1;-2]$. Urči objem rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$.



Nejdříve určíme vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

Z obrázku je vidět: $\boldsymbol{a} = C - D = (-4;-1;1)$ $\quad \boldsymbol{b} = D - A = (1;4;1)$.

$\boldsymbol{c} = F - B$ - souřadnice bodu B musíme určit výpočtem: $B = A + \boldsymbol{a} = [-2;-3;2]$

$\boldsymbol{c} = F - B = (-1;4;-4)$

Počítáme smíšený součin $V = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (-1-4;1+4;-16+1) = (-5;5;-15)$

$V = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = (-5;5;-15)(-1;4;-4) = 5+20+60 = 85$

Rovnoběžnostěn má objem 85.

Př. 7: Petáková:
strana 103/cvičení 56
strana 104/cvičení 58
strana 104/cvičení 59 b)

Shrnutí: Pomocí smíšeného součinu můžeme určit objem rovnoběžnostěnu, nebo snadno rozhodnout, zda tři vektory leží v jedné rovině.