

7.2.14 Smíšený součin

Předpoklady: 070213

Př. 1: Jsou dány vektory $\mathbf{u} = (2; 0; -3)$ a $\mathbf{v} = (4; -3; 2)$. Najdi libovolný vektor \mathbf{w} , která je na vektory \mathbf{u} , \mathbf{v} kolmý. Ověř kolmost vypočteného vektoru výpočtem.

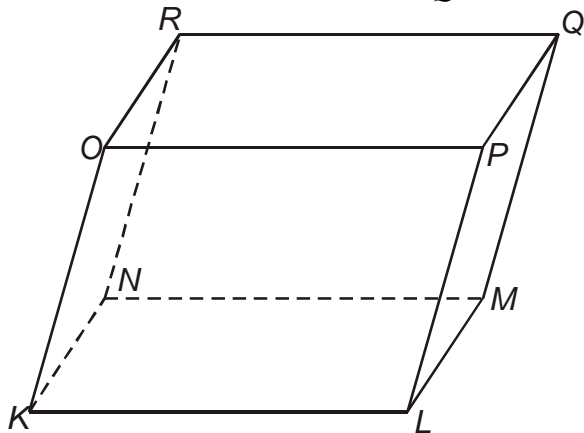
Vektorovým součinem dvou vektorů získáme vektor, který je kolmý na oba násobené vektory \Rightarrow vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je jedním z vektorů odpovídajících zadání.

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0 - 9; -12 - 4; -6 - 0) = (-9; -16; -6)$$

Kolmost ověříme pomocí skalárního součinu (který by měl být nulový):

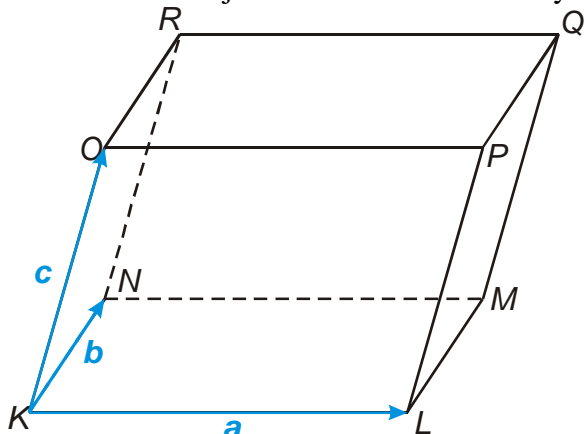
- $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = (-9; -16; -6) \cdot (2; 0; -3) = -18 + 0 + 18 = 0$
- $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = (-9; -16; -6) \cdot (4; -3; 2) = -36 + 48 - 12 = 0$

Je dán rovnoběžnostěn $KLMNOPQR$.



Jeho objem umíme spočítat stereometrickým vzorcem: $V = S_p \cdot v$.

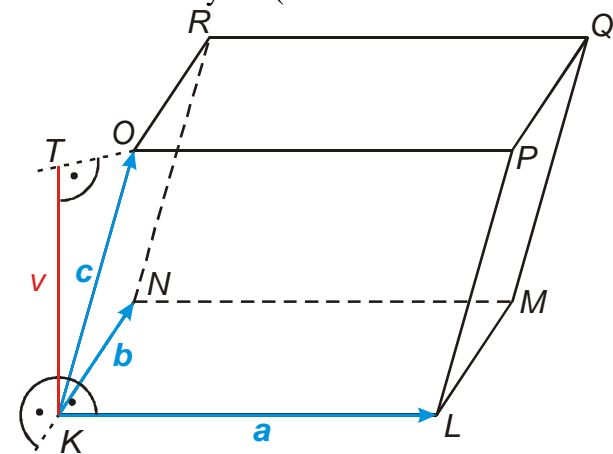
Rovnoběžnostěn je také určen třemi vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} a \mathbf{c} :



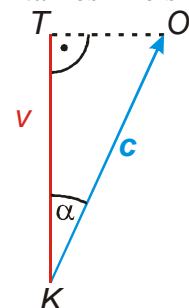
\Rightarrow jeho objem musí jít spočítat i pomocí těchto tří vektorů.

První krok už víme: $S_p = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ (velikost vektorového součinu $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ se rovná obsahu rovnoběžníku $ABCD$ – vlastnost vektorového součinu) $\Rightarrow V = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot v$.

Musíme určit výšku (kolmou vzdálenost mezi rovinami $KLMN$ a $OPQR$) pomocí vektoru c .



Nakreslíme si pravoúhlý trojúhelník KOT .



$$\text{Pro úhel } \alpha \text{ platí: } \cos \alpha = \frac{v}{|c|} \Rightarrow v = \cos \alpha \cdot |c|$$

$$\text{Dosadíme: } V = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot v = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |c| \cos \alpha .$$

Postřeh: Výsledek připomíná pravou stranu vzorce pro skalární součin $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \varphi$

(součin velikostí dvou vektorů $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ a $|c|$ a kosinu nějakého úhlu). Je úhel α úhlem, který svírají vektory $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ a c ?

Přímka KT je kolmá na rovnoběžník $KLMN$ \Rightarrow má stejný směr jako vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ \Rightarrow úhel α je úhel mezi vektory $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ a c \Rightarrow vztah $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |c| \cos \alpha$ je vztah pro výpočet skalárního

součinu vektorů $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ a $|c|$ z velikosti vektorů $\Rightarrow |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |c| \cos \alpha = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot c$.

\Rightarrow Jsme hotoví: Objem rovnoběžnostěnu můžeme vypočítat pomocí vektorů \mathbf{a} , \mathbf{b} a c podle vztahu: $V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot c$.

Malý zádrhel:

Vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} a c na našem obrázku tvoří pravotočivou bázi \Rightarrow proto směřuje vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ do stejného poloprostoru jako vektor c .

Kdyby vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} a c tvořily levotočivou bázi, vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ by směřoval do opačného poloprostoru než vektor c \Rightarrow výsledek by byl záporný \Rightarrow museli bychom z něj udělat absolutní hodnotu, abychom získali kladné číslo.

Objem rovnoběžnostěnu, který je určen vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} a c určíme ze vzorce $V = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot c|$

(absolutní hodnota řeší případné problémy s mínusem).

Číslo $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot c$ nazýváme smíšený součin vektorů \mathbf{a} , \mathbf{b} , c .

Př. 2: Rozhodni, kdy se smíšený součin tří nenulových vektorů \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} rovná nule.

Dvě možnosti řešení.

a) z vlastností skalárního a vektorového součinu

Skalární součin se rovná nule:

- jeden z vektorů je roven nule \Rightarrow vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ je nulový \Rightarrow vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} jsou rovnoběžné,
- vektory jsou na sebe kolmé \Rightarrow vektor \mathbf{c} je kolmý na vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \Rightarrow$ vektor \mathbf{c} leží v rovině určené vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} .

\Rightarrow Smíšený součin je nulový, právě když vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} leží v jedné rovině (jsou lineárně závislé).

b) z významu smíšeného součinu

Absolutní hodnota smíšeného součinu se rovná objemu rovnoběžnostěnu. Objem je nulový, když vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} neurčují rovnoběžnostěn \Rightarrow pokud vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} leží v jedné rovině.

Př. 3: Objem rovnoběžnostěnu nezávisí na tom, kterou ze stěn zvolíme za podstavu. Které další smíšené součiny můžeme použít pro výpočet jeho objemu (a rovnají se součinu $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$)?

Za podstavu volíme obdélník $KNRO \Rightarrow V = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$.

Za podstavu volíme obdélník $KLPO \Rightarrow V = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$.

Pro každé tři vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} v prostoru platí: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$.

Dodatek: Pomocí předchozí rovnosti se dokazuje distributivnost vektorového součinu a jeho asociativnost při násobení reálným číslem.

Máme smíšený součin libovolných vektorů \mathbf{a} , $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ a \mathbf{x} .

$$(\mathbf{a} \times [\mathbf{b} + \mathbf{c}]) \cdot \mathbf{x}$$

Provedeme posunutí vektorů podle vzorce $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$:

$$(\mathbf{a} \times [\mathbf{b} + \mathbf{c}]) \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \cdot [\mathbf{b} + \mathbf{c}],$$

skalární součin je distributivní: $(\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \cdot [\mathbf{b} + \mathbf{c}] = (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}$,

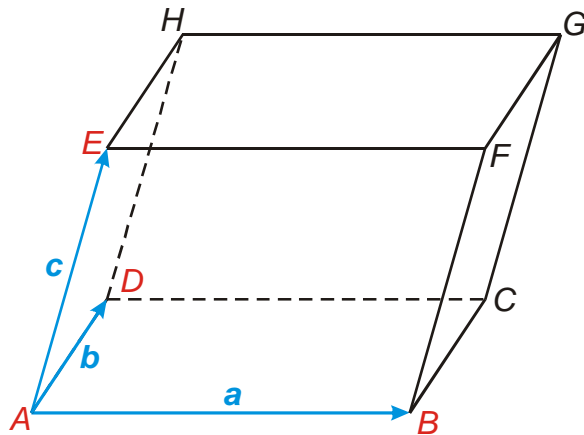
provedeme posunutí vektorů podle vzorce $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$:

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{x},$$

vytkneme \mathbf{x} : $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{x}$.

Platí tedy: $(\mathbf{a} \times [\mathbf{b} + \mathbf{c}]) \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{x}$ a tedy $\mathbf{a} \times [\mathbf{b} + \mathbf{c}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ - vektorový součin je distributivní vzhledem ke sčítání vektorů.

Př. 4: Jsou dány body $A[1;0;1]$, $B[3;-1;4]$, $D[2;2;2]$ a $E[-1;3;5]$. Urči objem rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$.



Nejdříve určíme vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} .

Z obrázku je vidět: $\mathbf{a} = B - A = (2; -1; 3)$, $\mathbf{b} = D - A = (1; 2; 1)$, $\mathbf{c} = E - A = (-2; 3; 4)$

Počítáme smíšený součin $V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-1 - 6; 3 - 2; 4 + 1) = (-7; 1; 5)$$

$$V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (-7; 1; 5) \cdot (-2; 3; 4) = 14 + 3 + 20 = 37$$

Rovnoběžnostěn má objem 37.

Dodatek: Další možné postupy výpočtu.

$$V = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$$

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (8 - 3; -2 - 4; 3 + 4) = (5; -6; 7)$$

$$V = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (5; -6; 7) \cdot (2; -1; 3) = 10 + 6 + 21 = 37$$

nebo $(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$

$$\mathbf{c} \times \mathbf{a} = (9 + 4; 8 + 6; 2 - 6) = (13; 14; -4)$$

$$V = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (13; 14; -4) \cdot (1; 2; 1) = 13 + 28 - 4 = 37$$

Pedagogická poznámka: V hodině si rozdělíme postupy tak, aby podle každé ze tří uvedených možností $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ počítal alespoň někdo a mohli jsme si srovnat výsledky. Pokud máte nějakého opravdového experimentátora, můžete ho nechat proházet vrcholy, nechat příklad spočítat proházený a pak vysvětlit výsledek.

Př. 5: Jsou dány vektory $\mathbf{u} = (1; 2; 3)$, $\mathbf{v} = (1; 1; 1)$ a $\mathbf{w} = (1; 3; 1)$. Rozhodni, zda vektory \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} leží v jedné rovině. Pokud v jedné rovině neleží, rozhodni, zda tvoří levotočivou nebo pravotočivou bázi.

Spočteme smíšený součin vektorů \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} a z hodnoty výsledku budeme moci odpovědět na otázku.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2 - 3; 3 - 1; 1 - 2) = (-1; 2; -1)$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (-1; 2; -1) \cdot (1; 3; 1) = -1 + 6 - 1 = 4$$

Smíšený součin vektorů u, v, w je kladné číslo \Rightarrow

- vektory u, v, w neleží v jedné rovině (výsledek není nula),
- vektory u, v, w tvoří pravotočivou bázi (výsledek je kladný).

Př. 6: Je dán čtyřstěn $ABCD$, $A[-2;-1;-2]$, $B[1;4;0]$, $C[1;1;3]$ a $D[2;5;3]$. Urči:

- a) obsah stěny BCD , b) délku výšky v_D v této stěně,
 c) objem čtyřstěnu, d) délku výšky čtyřstěnu kolmé na stěnu BCD .

a) obsah stěny BCD

Využijeme velikost vektorového součinu vektorů dvou stran trojúhelníku, který stěnu tvoří.

$$u = C - B = (0; -3; 3) \qquad v = D - B = (1; 1; 3)$$

$$u \times v = (-9 - 3; 3 - 0; 0 + 3) = (-12; 3; 3)$$

$$|u \times v| = \sqrt{(-12)^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$$

Stěnu tvoří trojúhelník, má tedy poloviční obsah než je velikost vektorového součinu \Rightarrow

$$S_{BCD} = \frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

b) délka výšky v_D ve stěně BCD

Obsah trojúhelníku můžeme určit planimetricky vztahem $S = \frac{av_a}{2} \Rightarrow v_a = \frac{2S}{a}$.

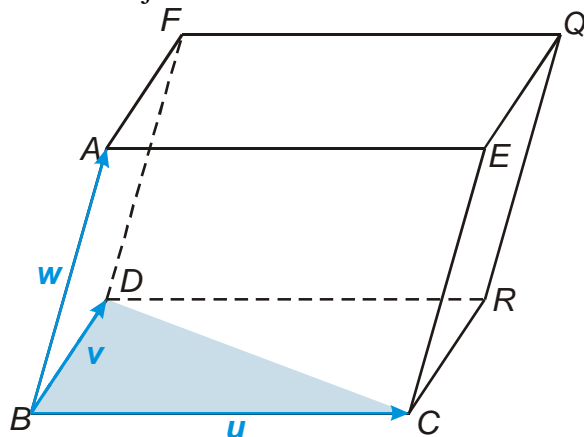
Výška v_D je kolmá na stranu BC . Určíme její délku, obsah trojúhelníku známe.

$$|BC| = |u| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

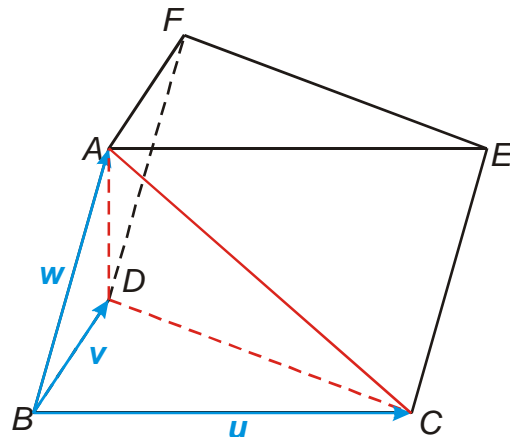
$$v_D = \frac{2S_{BCD}}{|BC|} = \frac{2 \cdot \frac{9\sqrt{2}}{2}}{3\sqrt{2}} = 3$$

c) objem čtyřstěnu

Z obrázků je vidět:



Obsah trojúhelníku BCD je polovinou obsahu odpovídajícího rovnoběžníku $BCRD$.



Objem čtyřstěnu $BCDA$ je třetinou objemu odpovídajícího hranolu $BCDAEF$ (obecné pravidlo pro objem jehlanu).

\Rightarrow Objem čtyřstěnu je šestinou smíšeného součinu $(u \times v) \cdot w$.

$$w = A - B = (-3; -5; -2)$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (-12; 3; 3)(-3; -5; -2) = 36 - 15 - 6 = 15$$

Objem čtyřstěnu $ABCD$ je $\frac{15}{6} = \frac{5}{2}$.

d) délku výšky čtyřstěnu kolmé na stěnu BCD

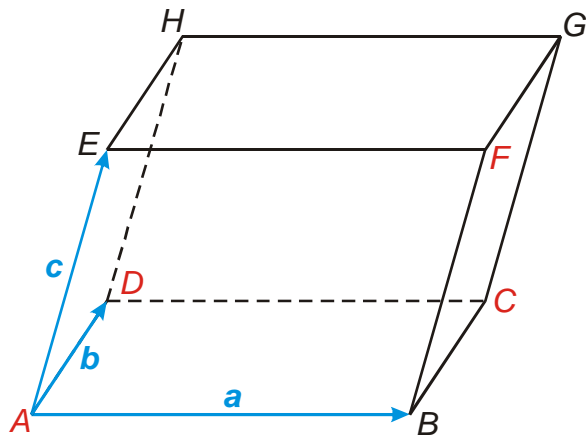
Objem čtyřstěnu můžeme také spočítat stereometricky vztahem $V = \frac{1}{3} S_p v \Rightarrow v = \frac{3V}{S_p}$.

Objem čtyřstěnu i obsah podstavy BCD známe. Dosadíme:

$$v = \frac{3V}{S_p} = \frac{3 \cdot \frac{5}{2}}{\frac{9\sqrt{2}}{2}} = \frac{3 \cdot 5}{9\sqrt{2}} = \frac{5}{3\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{6}$$

Výška čtyřstěnu kolmá na stěnu BCD má délku $\frac{5\sqrt{2}}{6}$.

Př. 7: Jsou dány body $A[2; -2; 1]$, $C[-1; 1; 3]$, $D[3; 2; 2]$ a $F[-3; 1; -2]$. Urči objem rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$.



Nejdříve určíme vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} .

Z obrázku je vidět: $\mathbf{a} = C - D = (-4; -1; 1)$ $\mathbf{b} = D - A = (1; 4; 1)$.

$\mathbf{c} = F - B$ - souřadnice bodu B musíme určit výpočtem: $B = A + \mathbf{a} = [-2; -3; 2]$

$$\mathbf{c} = F - B = (-1; 4; -4)$$

Počítáme smíšený součin $V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-1 - 4; 1 + 4; -16 + 1) = (-5; 5; -15)$$

$$V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (-5; 5; -15)(-1; 4; -4) = 5 + 20 + 60 = 85$$

Rovnoběžnostěn má objem 85.

Př. 8: Petáková:

strana 103/cvičení 56

strana 104/cvičení 58

strana 104/cvičení 59 b)

Shrnutí: Pomocí smíšeného součinu můžeme určit objem rovnoběžnostěnu, nebo snadno rozhodnout, zda tři vektory leží v jedné rovině.