

7.3.2 Parametrické vyjádření přímky II

Předpoklady: 070301

Pedagogická poznámka: V podstatě pro celou hodinu platí, že příklady by neměly působit žákům větší problémy. Pokud se problémy objeví (stává se to často), je třeba se neustále vracet k rovnici $X = A + tu$ a významu jednotlivých členů v ní.

Př. 1: Jsou dány body $A[-2;3]$ a $B[2;-1]$. Najdi parametrické vyjádření přímky AB . Leží na přímce AB bod $C[6;4]$? Urči y -ovou souřadnici bodu $D[1;?]$ tak, aby ležel na přímce AB .

Na parametrické vyjádření přímky potřebujeme:

- bod: $A[-2;3]$,
- směrový vektor: $\mathbf{u} = \mathbf{AB} = B - A = (4; -4)$.

⇒ Parametrické vyjádření přímky AB :
$$\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 3 - 4t, t \in R \end{cases}$$

Dosadíme bod C :
$$\begin{cases} 6 = -2 + 4t \\ 4 = 3 - 4t \end{cases}$$

Vypočteme z obou rovnic parametr t .

$$\begin{aligned} 6 &= -2 + 4t & 4 &= 3 - 4t \\ 8 &= 4t \Rightarrow t = 2 & 1 &= -4t \Rightarrow t = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

⇒ Hodnoty parametru t se liší ⇒ Bod C neleží na přímce AB .

Dosadíme bod D :
$$\begin{cases} 1 = -2 + 4t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$$

Soustava dvou rovnic o dvou neznámých. Z první vypočteme t a dosadíme do druhé.

$$\begin{aligned} 1 &= -2 + 4t \\ 3 &= 4t \Rightarrow t = \frac{3}{4} & y &= 3 - 4t = 3 - 4 \cdot \frac{3}{4} = 0 \end{aligned}$$

Bod D má souřadnice $D[1;0]$.

Pedagogická poznámka: Pokud má někdo s předchozím příkladem problémy (a má k dispozici vlastní sešit), je třeba ho trestat.

Př. 2: Je dán trojúhelník ABC ; $A[-2;3]$, $B[4;-1]$, $C[2;5]$. Urči parametrické vyjádření přímky, na které leží:
a) strana AB ,
b) výška v_c ,
c) osa strany AB ,
d) těžnice t_a ,
e) střední příčka $S_{AB}S_{AC}$.

a) strana AB

- Bod: $A[-2;3]$,

- směrový vektor: $\mathbf{AB} = B - A = (6; -4) \Rightarrow \mathbf{u} = (3; -2)$.

\Rightarrow Parametrické vyjádření přímky AB :
$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 3 - 2t; t \in R \end{cases}$$

b) výška v_c

- Bod: $C[2; 5]$,
- směrový vektor výšky v_c je kolmý na směrový vektor přímky $AB \Rightarrow \mathbf{u} = (2; 3)$.

\Rightarrow Parametrické vyjádření přímky, na které leží výška v_c :
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 5 + 3t; t \in R \end{cases}$$

c) osa strany AB

Je kolmá na stranu AB , prochází jejím středem $S_{AB}[1; 1]$.

- Bod: $S_{AB}[1; 1]$,
- směrový vektor výšky v_c je kolmý na směrový vektor přímky $AB \Rightarrow \mathbf{u} = (2; 3)$.

\Rightarrow Parametrické vyjádření osy strany AB :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 3t; t \in R \end{cases}$$

d) těžnice t_a

Přímka určená body $A[-2; 3]$, $S_{BC}[3; 2]$.

- Bod: $A[-2; 3]$,
- směrový vektor: $S_{BC} - A = (5; -1) \Rightarrow \mathbf{u} = (5; -1)$.

\Rightarrow Parametrické vyjádření přímky, na které leží těžnice t_c :
$$\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 3 - t; t \in R \end{cases}$$

e) střední příčka $S_{AB}S_{AC}$

Přímka určená body $S_{AB}[1; 1]$, $S_{AC}[0; 4]$.

- Bod: $S_{AB}[1; 1]$,
- směrový vektor: $S_{AC} - S_{AB} = (-1; 3) \Rightarrow \mathbf{u} = (-1; 3)$.

\Rightarrow Parametrické vyjádření přímky, na které leží střední příčka $S_{AB}S_{AC}$:
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 3t; t \in R \end{cases}$$

Př. 3: Najdi souřadnice alespoň tří bodů, které leží na přímce $p = \{[1 - 2t; 3 + t]; t \in R\}$.

Parametrické vyjádření přímky $p = \{[1 - 2t; 3 + t]; t \in R\}$ představuje dvě rovnice:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$$
, do kterým můžeme za parametr dosadit libovolné reálné číslo a tímto dosazením

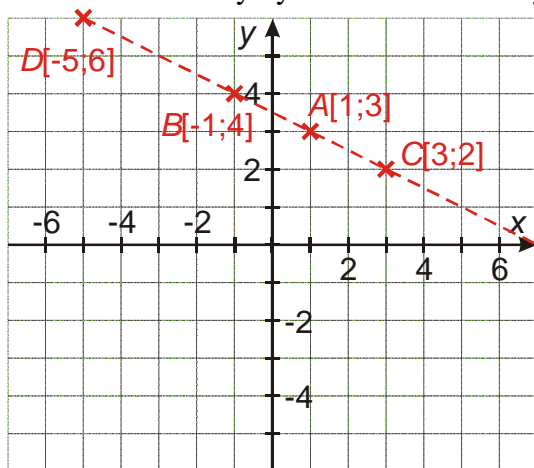
získáme souřadnice bodu na přímce.

Dosazujeme:

- $t = 0$:
$$\begin{cases} x = 1 - 2t = 1 - 2 \cdot 0 = 1 \\ y = 3 + t = 3 + 0 = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{bod } A[1; 3] \text{ (souřadnice byly viditelné ihned),}$$
- $t = 1$:
$$\begin{cases} x = 1 - 2t = 1 - 2 \cdot 1 = -1 \\ y = 3 + t = 3 + 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{bod } B[-1; 4],$$

- $t = -1$: $x = 1 - 2t = 1 - 2 \cdot (-1) = 3$
 $y = 3 + t = 3 + (-1) = 2 \Rightarrow$ bod $C[3; 2]$,
- $t = 3$: $x = 1 - 2t = 1 - 2 \cdot 3 = -5$
 $y = 3 + t = 3 + 3 = 6 \Rightarrow$ bod $D[-5; 6]$,
- ...

Pokud určené body vyneseme do soustavy souřadnic, zjistíme, že opravdu leží na přímce.



Př. 4: Jakou společnou vlastnost mají body ležící na ose x ? Jaká je společná vlastnost bodů na ose y ? Urči průsečíky přímky q : $x = -2 + 5t$; $y = 3 + 2t$; $t \in \mathbb{R}$ se souřadnými osami.

Body na ose x : $[0; 0]$, $[1; 0]$, $[-2; 0]$, $[\sqrt{15}; 0] \Rightarrow$ všechny body na ose x mají y -ovou souřadnici nulovou \Rightarrow můžeme je psát jako $X[x; 0]$.

Body na ose y : $[0; 0]$, $[0; 1]$, $[0; -3]$, $[0; \pi] \Rightarrow$ všechny body na ose y mají x -ovou souřadnici nulovou \Rightarrow můžeme je psát jako $Y[0; y]$.

Hledáme průsečík přímky q s osou $x \Rightarrow$ bod, který leží na přímce a má tvar $X[x; 0]$.

Dosadíme do rovnice přímky: $x = -2 + 5t$
 $0 = 3 + 2t \Rightarrow$ z druhé rovnice můžeme vypočítat hodnotu parametru t .

$$0 = 3 + 2t \quad / -3$$

$$2t = -3 \quad / : 2$$

$$t = -\frac{3}{2}$$

Dosadíme do první rovnice: $x = -2 + 5t = -2 + 5 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -2 - \frac{15}{2} = -\frac{19}{2} \Rightarrow$ průsečík

$$X\left[-\frac{19}{2}; 0\right].$$

Hledáme průsečík přímky q s osou $y \Rightarrow$ bod, který leží na přímce a má tvar $Y[0; y]$.

Dosadíme do rovnice přímky:
$$\begin{aligned} 0 &= -2 + 5t \\ y &= 3 + 2t \end{aligned} \Rightarrow$$
 z první rovnice můžeme vypočítat hodnotu

parametru t .

$$0 = -2 + 5t \quad / +2$$

$$5t = 2 \quad / :5$$

$$t = \frac{2}{5}$$

Dosadíme do druhé rovnice: $y = 3 + 2t = 3 + 2 \cdot \frac{2}{5} = 3 + \frac{4}{5} = \frac{19}{5} \Rightarrow$ průsečík $Y\left[0; \frac{19}{5}\right]$.

Př. 5: Jsou dány přímky: $p = \{[3 - 4t; -2 + 2t]; t \in R\}$, $q: X = [1; -1] + t(6; -3)$ a

$r: \begin{cases} x = -3 + 2t; \\ y = 1 - t; t \in R \end{cases}$. Zakresli tyto přímky do kartézské soustavy souřadnic.

U všech přímek můžeme postupovat stejně: určíme souřadnice dvou bodů a ty pak využijeme k zakreslení přímky do soustavy souřadnic.

$p = \{[3 - 4t; -2 + 2t]; t \in R\}$:

- $t = 0$: $\begin{aligned} x &= 3 - 4t = 3 - 4 \cdot 0 = 3 \\ y &= -2 + 2t = -2 + 2 \cdot 0 = -2 \end{aligned} \Rightarrow$ bod $A[3; -2]$ (souřadnice byly viditelné ihned),
- $t = 1$: $\begin{aligned} x &= 3 - 4t = 3 - 4 \cdot 1 = -1 \\ y &= -2 + 2t = -2 + 2 \cdot 1 = 0 \end{aligned} \Rightarrow$ bod $B[-1; 0]$.

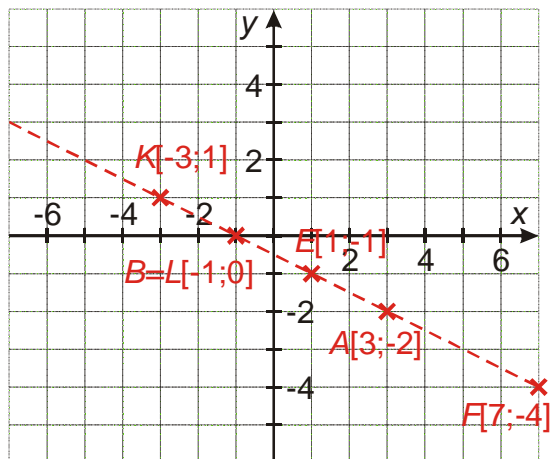
$q: X = [1; -1] + t(6; -3)$:

- $t = 0$: $\begin{aligned} x &= 1 + 6t = 1 + 6 \cdot 0 = 1 \\ y &= -1 - 3t = -1 - 3 \cdot 0 = -1 \end{aligned} \Rightarrow$ bod $E[1; -1]$ (souřadnice byly viditelné ihned),
- $t = 1$: $\begin{aligned} x &= 1 + 6t = 1 + 6 \cdot 1 = 7 \\ y &= -1 - 3t = -1 - 3 \cdot 1 = -4 \end{aligned} \Rightarrow$ bod $F[7; -4]$.

$r: \begin{cases} x = -3 + 2t; \\ y = 1 - t; t \in R \end{cases}$

- $t = 0$: $\begin{aligned} x &= -3 + 2t = -3 + 2 \cdot 0 = -3 \\ y &= 1 - t = 1 - 0 = 1 \end{aligned} \Rightarrow$ bod $K[-3; 1]$ (souřadnice byly viditelné ihned),
- $t = 1$: $\begin{aligned} x &= -3 + 2t = -3 + 2 \cdot 1 = -1 \\ y &= 1 - t = 1 - 1 = 0 \end{aligned} \Rightarrow$ bod $L[-1; 0]$.

Získané body zakreslíme do soustavy souřadnic.



Všechny body leží na jedné přímce \Rightarrow platí $p \cong q \cong r$.

Př. 6: Vysvětli výsledek předchozího příkladu.

Tři různá parametrická vyjádření představovala stejnou přímku. Napíšeme si počáteční body a směrové vektory všech vyjádření:

- p : $A[3; -2]$, $\mathbf{u} = (-4; 2)$,
- q : $E[1; -1]$, $\mathbf{v} = (6; -3)$,
- r : $K[-3; 1]$, $\mathbf{w} = (2; -1)$,

Všechny směrové vektory mají stejný směr (jsou si navzájem násobky: $\mathbf{u} = -2\mathbf{w}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{w}$) \Rightarrow představují stejný směr.

Počáteční body přímek q a r leží na přímce p .

Parametrické vyjádření přímky není jednoznačné: jako startovní bod můžeme použít libovolný bod přímky (nekonečně mnoho možností), jako směrový vektor můžeme použít i libovolný násobek libovolného směrového vektoru.

Velmi často se směrový vektor získaný pomocí zadaných bodů zjednodušuje krácením tak, aby parametrické vyjádření přímky bylo co nejjednodušší.

Př. 7: Najdi parametrické vyjádření přímky AB ; $A[-2; 4]$, $B[3; -1]$. Směrový vektor zvol tak, aby obsahoval co nejmenší hodnoty.

- Bod: $A[-2; 4]$,
- směrový vektor: $\mathbf{AB} = B - A = (5; -5) \Rightarrow \mathbf{u} = (1; -1)$.

\Rightarrow Parametrické vyjádření přímky AB :

$$\begin{aligned} x &= -2 + t \\ y &= 4 - t; t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Př. 8: Najdi parametrické vyjádření přímky AB ; $A[3; 2]$, $B[-1; 0]$. Směrový vektor zvol tak, aby obsahoval co nejmenší hodnoty a minimum záporných souřadnic.

- Bod: $A[3; 2]$,
- směrový vektor: $\mathbf{AB} = B - A = (-4; -2) \Rightarrow \mathbf{u} = (2; 1)$.

⇒ Parametrické vyjádření přímky AB :
$$\begin{aligned} x &= 3 + 2t \\ y &= 2 + t; t \in R \end{aligned}$$

Pedagogická poznámka: Následující příklad je domácí úkol pro žáky, kteří měli problémy s příkladem číslo 2.

Př. 9: Je dán trojúhelník KLM ; $K[-1;4]$, $L[5;6]$, $M[-3;-2]$. Urči parametrické vyjádření přímky, na které leží: a) strana LM , b) výška v_m ,
c) osa strany KL , d) těžnice t_l , e) střední příčka $S_{KL}S_{KM}$.

a) strana LM

- Bod: $L[5;6]$,
- směrový vektor: $LM = M - L = (-8; -8) \Rightarrow u = (1; 1)$.

⇒ Parametrické vyjádření přímky LM :
$$\begin{aligned} x &= 5 + t \\ y &= 6 + t; t \in R \end{aligned}$$

b) výška v_m

- Bod: $M[-3;-2]$,
- směrový vektor výšky v_m je kolmý na směrový vektor přímky KL :

$$KL = L - K = (6; 2) \Rightarrow u = (3; 1)$$

$$\Rightarrow u_{v_m} = (1; -3)$$

⇒ Parametrické vyjádření přímky, na které leží výška v_m :
$$\begin{aligned} x &= -3 + t \\ y &= -2 - 3t; t \in R \end{aligned}$$

c) osa strany KL

Je kolmá na stranu KL , prochází jejím středem $S_{KL}[2;5]$.

- Bod: $S_{KL}[2;5]$,
- směrový vektor osy strany KL je kolmý na směrový vektor přímky KL (a rovnoběžný se směrovým vektorem výšky v_m) $\Rightarrow u = (1; -3)$.

⇒ Parametrické vyjádření osy strany KL :
$$\begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 5 - 3t; t \in R \end{aligned}$$

d) těžnice t_l

Přímka určená body $L[5;6]$, $S_{KM}[-2;1]$.

- Bod: $L[5;6]$,
- směrový vektor: $S_{KM} - L = (7; 5) \Rightarrow u = (7; 5)$.

⇒ Parametrické vyjádření přímky, na které leží těžnice t_l :
$$\begin{aligned} x &= 5 + 7t \\ y &= 6 + 5t; t \in R \end{aligned}$$

e) střední příčka $S_{KL}S_{KM}$

Přímka určená body $S_{KL}[2;5]$, $S_{KM}[-2;1]$.

- Bod: $S_{KL}[2;5]$,

- směrový vektor: $S_{KM} - S_{KL} = (4; 4) \Rightarrow \mathbf{u} = (1; 1)$ (rovnoběžný se směrovým vektorem přímky LM).

\Rightarrow Parametrické vyjádření přímky, na které leží střední příčka $S_{KL} S_{KM}$:
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 + t; t \in R \end{cases}$$

Př. 10: Petáková:

strana 106/cvičení 22 a) c)

strana 106/cvičení 23 a) c)

Shrnutí: Omezením hodnot parametru můžeme vyjádřit i části přímky.