7.3.2 Parametrické vyjádření přímky II

Předpoklady: 070301

Pedagogická poznámka: V podstatě pro celou hodinu platí, že příklady by neměly působit žákům větší problémy. Pokud se problémy objeví (stává se to často), je třeba se neustále vracet k rovnici $X = A + t\boldsymbol{u}$ a významu jednotlivých členů v ní.

Př. 1: Jsou dány body $A[-2;3]$ a $B[2;-1]$. Najdi parametrické vyjádření přímky *AB*. Leží na přímce *AB* bod $C[6;4]$? Urči *y*-ovou souřadnici bodu $D[1;?]$ tak, aby ležel na přímce *AB*.

Na parametrické vyjádření přímky potřebujeme:

- bod: $A[-2;3]$,
- směrový vektor: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB} = B - A = (4;-4)$.

$\Rightarrow$ Parametrické vyjádření přímky *AB*: $\begin{matrix} x = -2 + 4t \\ y = 3 - 4t, t \in R \end{matrix}$.

Dosadíme **bod *C***: $\begin{matrix} 6 = -2 + 4t \\ 4 = 3 - 4t \end{matrix}$.

Vypočteme z obou rovnic parametr *t*.

$$\begin{matrix} 6 = -2 + 4t \\ 8 = 4t \Rightarrow t = 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 4 = 3 - 4t \\ 1 = -4t \Rightarrow t = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4} \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Hodnoty parametru *t* se liší $\Rightarrow$ Bod *C* neleží na přímce *AB*.

Dosadíme **bod *D***: $\begin{matrix} 1 = -2 + 4t \\ y = 3 - 4t \end{matrix}$.

Soustava dvou rovnic o dvou neznámých. Z první vypočteme *t* a dosadíme do druhé.

$$\begin{matrix} 1 = -2 + 4t \\ 3 = 4t \Rightarrow t = \frac{3}{4} \end{matrix} \qquad y = 3 - 4t = 3 - 4 \cdot \frac{3}{4} = 0$$

Bod *D* má souřadnice $D[1;0]$.

Pedagogická poznámka: Pokud má někdo s předchozím příkladem problémy (a má k dispozici vlastní sešit), je třeba ho trestat.

Př. 2: Je dán trojúhelník *ABC*; $A[-2;3]$, $B[4;-1]$, $C[2;5]$. Urči parametrické vyjádření přímky, na které leží: a) strana *AB*, b) výška v_c, c) osa strany *AB*, d) těžnice t_a, e) střední příčka $S_{AB}S_{AC}$.

a) strana *AB*

- Bod: $A[-2;3]$,

- směrový vektor: $\boldsymbol{AB} = B - A = (6;-4) \Rightarrow \boldsymbol{u} = (3;-2)$.

$\Rightarrow$ Parametrické vyjádření přímky AB: $\begin{matrix} x = -2 + 3t \\ y = 3 - 2t; t \in R \end{matrix}$.

b) výška v_c

- Bod: $C[2;5]$,
- směrový vektor výšky v_c je kolmý na směrový vektor přímky $AB \Rightarrow \boldsymbol{u} = (2;3)$.

$\Rightarrow$ Parametrické vyjádření přímky, na které leží výška v_c: $\begin{matrix} x = 2 + 2t \\ y = 5 + 3t; t \in R \end{matrix}$.

c) osa strany ***AB***

Je kolmá na stranu AB, prochází jejím středem $S_{AB}[1;1]$.

- Bod: $S_{AB}[1;1]$,
- směrový vektor výšky v_c je kolmý na směrový vektor přímky $AB \Rightarrow \boldsymbol{u} = (2;3)$.

$\Rightarrow$ Parametrické vyjádření osy strany AB: $\begin{matrix} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 3t; t \in R \end{matrix}$.

d) těžnice t_a

Přímka určená body $A[-2;3]$, $S_{BC}[3;2]$.

- Bod: $A[-2;3]$,
- směrový vektor: $S_{BC} - A = (5;-1) \Rightarrow \boldsymbol{u} = (5;-1)$.

$\Rightarrow$ Parametrické vyjádření přímky, na které leží těžnice t_c: $\begin{matrix} x = -2 + 5t \\ y = 3 - t; t \in R \end{matrix}$.

e) střední příčka $S_{AB}S_{AC}$

Přímka určená body $S_{AB}[1;1]$, $S_{AC}[0;4]$.

- Bod: $S_{AB}[1;1]$,
- směrový vektor: $S_{AC} - S_{AB} = (-1;3) \Rightarrow \boldsymbol{u} = (-1;3)$.

$\Rightarrow$ Parametrické vyjádření přímky, na které leží střední příčka $S_{AB}S_{AC}$: $\begin{matrix} x = 1 - t \\ y = 1 + 3t; t \in R \end{matrix}$.

Př. 3: Najdi souřadnice alespoň tří bodů, které leží na přímce $p = \{[1-2t;\, 3+t];\, t \in R\}$.

Parametrické vyjádření přímky $p = \{[1-2t;\, 3+t];\, t \in R\}$ představuje dvě rovnice:

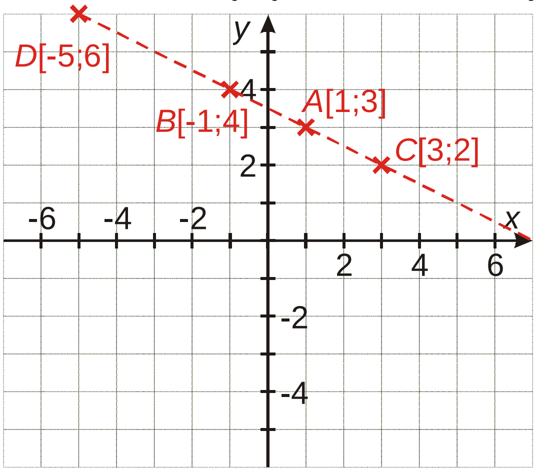
$\begin{matrix} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \end{matrix}$, do kterým můžeme za parametr dosadit libovolné reálné číslo a tímto dosazením získáme souřadnice bodu na přímce.

Dosazujeme:

- $t = 0$: $\begin{matrix} x = 1 - 2t = 1 - 2 \cdot 0 = 1 \\ y = 3 + t = 3 + 0 = 3 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ bod $A[1;\,3]$ (souřadnice byly viditelné ihned),
- $t = 1$: $\begin{matrix} x = 1 - 2t = 1 - 2 \cdot 1 = -1 \\ y = 3 + t = 3 + 1 = 4 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ bod $B[-1;\,4]$,

- $t=-1$: $\begin{aligned} x &= 1-2t = 1-2\cdot(-1) = 3 \\ y &= 3+t = 3+(-1) = 2 \end{aligned}$ $\Rightarrow$ bod $C[3;2]$,
- $t=3$: $\begin{aligned} x &= 1-2t = 1-2\cdot 3 = -5 \\ y &= 3+t = 3+3 = 6 \end{aligned}$ $\Rightarrow$ bod $D[-5;6]$,
- …

Pokud určené body vyneseme do soustavy souřadnic, zjistíme, že opravdu leží na přímce.



Př. 4: Jakou společnou vlastnost mají body ležící na ose x? Jaká je společná vlastnost bodů na ose y? Urči průsečíky přímky q: $\begin{aligned} x &= -2+5t; \\ y &= 3+2t; t \in R \end{aligned}$ se souřadnými osami.

Body na ose x: $[0;0]$, $[1;0]$, $[-2;0]$, $[\sqrt{15};0]$ $\Rightarrow$ všechny body na ose x mají y-ovou souřadnici nulovou $\Rightarrow$ můžeme je psát jako $X[x;0]$.

Body na ose y: $[0;0]$, $[0;1]$, $[0;-3]$, $[0;\pi]$ $\Rightarrow$ všechny body na ose y mají x-ovou souřadnici nulovou $\Rightarrow$ můžeme je psát jako $Y[0;y]$.

Hledáme průsečík přímky q s osou x $\Rightarrow$ bod, který leží na přímce a má tvar $X[x;0]$.

Dosadíme do rovnice přímky: $\begin{aligned} x &= -2+5t \\ 0 &= 3+2t \end{aligned}$ $\Rightarrow$ z druhé rovnice můžeme vypočítat hodnotu parametru t.

$0 = 3+2t \quad / -3$

$2t = -3 \quad / :2$

$t = -\frac{3}{2}$

Dosadíme do první rovnice: $x = -2+5t = -2+5\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = -2-\frac{15}{2} = -\frac{19}{2}$ $\Rightarrow$ průsečík $X\left[-\frac{19}{2};0\right]$.

Hledáme průsečík přímky q s osou y $\Rightarrow$ bod, který leží na přímce a má tvar $Y[0; y]$.

Dosadíme do rovnice přímky: $\begin{matrix} 0=-2+5t \\ y=3+2t \end{matrix}$ $\Rightarrow$ z první rovnice můžeme vypočítat hodnotu parametru t.

$0=-2+5t \quad /+2$

$5t=2 \quad /:5$

$t=\frac{2}{5}$

Dosadíme do druhé rovnice: $y=3+2t=3+2\cdot\frac{2}{5}=3+\frac{4}{5}=\frac{19}{5}$ $\Rightarrow$ průsečík $Y\left[0; \frac{19}{5}\right]$.

Př. 5: Jsou dány přímky: $p=\{[3-4t; -2+2t]; t\in R\}$, q: $X=[1;-1]+t(6;-3)$ a r: $\begin{matrix} x=-3+2t; \\ y=1-t; t\in R \end{matrix}$. Zakresli tyto přímky do kartézské soustavy souřadnic.

U všech přímek můžeme postupovat stejně: určíme souřadnice dvou bodů a ty pak využijeme k zakreslení přímky do soustavy souřadnic.

$p=\{[3-4t; -2+2t]; t\in R\}$:

- $t=0$: $\begin{matrix} x=3-4t=3-4\cdot 0=3 \\ y=-2+2t=-2+2\cdot 0=-2 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ bod $A[3;-2]$ (souřadnice byly viditelné ihned),
- $t=1$: $\begin{matrix} x=3-4t=3-4\cdot 1=-1 \\ y=-2+2t=-2+2\cdot 1=0 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ bod $B[-1; 0]$.

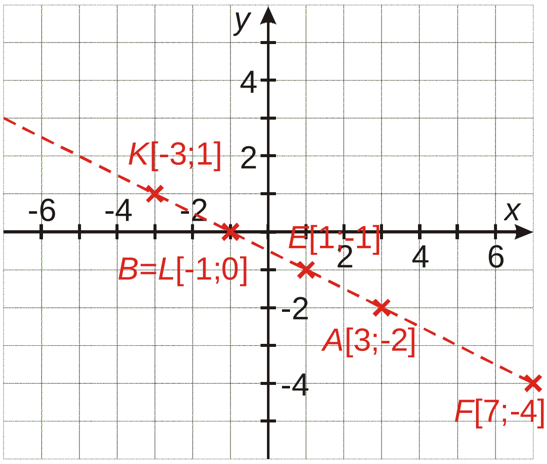
q: $X=[1;-1]+t(6;-3)$:

- $t=0$: $\begin{matrix} x=1+6t=1+6\cdot 0=1 \\ y=-1-3t=-1-3\cdot 0=-1 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ bod $E[1;-1]$ (souřadnice byly viditelné ihned),
- $t=1$: $\begin{matrix} x=1+6t=1+6\cdot 1=7 \\ y=-1-3t=-1-3\cdot 1=-4 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ bod $F[7;-4]$.

r: $\begin{matrix} x=-3+2t; \\ y=1-t; t\in R \end{matrix}$.

- $t=0$: $\begin{matrix} x=-3+2t=-3+2\cdot 0=-3 \\ y=1-t=1-0=1 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ bod $K[-3;1]$ (souřadnice byly viditelné ihned),
- $t=1$: $\begin{matrix} x=-3+2t=-3+2\cdot 1=-1 \\ y=1-t=1-1=0 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ bod $L[-1; 0]$.

Získané body zakreslíme do soustavy souřadnic.



Všechny body leží na jedné přímce $\Rightarrow$ platí $p \cong q \cong r$.

Př. 6: Vysvětli výsledek předchozího příkladu.

Tři různá parametrická vyjádření představovala stejnou přímku. Napíšeme si počáteční body a směrové vektory všech vyjádření:

- p: $A[3;-2]$, $\boldsymbol{u}=(-4;2)$,
- q: $E[1;-1]$, $\boldsymbol{v}=(6;-3)$,
- r: $K[-3;1]$, $\boldsymbol{w}=(2;-1)$,

Všechny směrové vektory mají stejný směr (jsou si navzájem násobky: $\boldsymbol{u}=-2\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v}=3\boldsymbol{w}$) $\Rightarrow$ představují stejný směr.
Počáteční body přímek q a r leží na přímce p.

Parametrické vyjádření přímky není jednoznačné: jako startovní bod můžeme použít libovolný bod přímky (nekonečně mnoho možností), jako směrový vektor můžeme použít i libovolný násobek libovolného směrového vektoru.

Velmi často se směrový vektor získaný pomocí zadaných bodů zjednodušuje krácením tak, aby parametrické vyjádření přímky bylo co nejjednodušší.

Př. 7: Najdi parametrické vyjádření přímky AB; $A[-2;4]$, $B[3;-1]$. Směrový vektor zvol tak, aby obsahoval co nejmenší hodnoty.

- Bod: $A[-2;4]$,
- směrový vektor: $\boldsymbol{AB}=B-A=(5;-5)\Rightarrow \boldsymbol{u}=(1;-1)$.

$\Rightarrow$ Parametrické vyjádření přímky AB: $\begin{matrix} x=-2+t \\ y=4-t; t\in R \end{matrix}$.

Př. 8: Najdi parametrické vyjádření přímky AB; $A[3;2]$, $B[-1;0]$. Směrový vektor zvol tak, aby obsahoval co nejmenší hodnoty a minimum záporných souřadnic.

- Bod: $A[3;2]$,
- směrový vektor: $\boldsymbol{AB}=B-A=(-4;-2)\Rightarrow \boldsymbol{u}=(2;1)$.

$\Rightarrow$ Parametrické vyjádření přímky *AB*: $\begin{aligned} x &= 3+2t \\ y &= 2+t; t \in R \end{aligned}$.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je domácí úkol pro žáky, kteří měli problémy s příkladem číslo 2.

Př. 9: Je dán trojúhelník *KLM*; $K[-1;4]$, $L[5;6]$, $M[-3;-2]$. Urči parametrické vyjádření přímky, na které leží: a) strana *LM*, b) výška v_m, c) osa strany *KL*, d) těžnice t_l, e) střední příčka $S_{KL}S_{KM}$.

a) strana *LM*

- Bod: $L[5;6]$,
- směrový vektor: $\boldsymbol{LM} = M - L = (-8;-8) \Rightarrow \boldsymbol{u} = (1;1)$.

$\Rightarrow$ Parametrické vyjádření přímky *LM*: $\begin{aligned} x &= 5+t \\ y &= 6+t; t \in R \end{aligned}$.

b) výška v_m

- Bod: $M[-3;-2]$,
- směrový vektor výšky v_m je kolmý na směrový vektor přímky *KL*:
  $\boldsymbol{KL} = L - K = (6;2) \Rightarrow \boldsymbol{u} = (3;1)$
  $\Rightarrow \boldsymbol{u}_{v_m} = (1;-3)$.

$\Rightarrow$ Parametrické vyjádření přímky, na které leží výška v_m: $\begin{aligned} x &= -3+t \\ y &= -2+-3t; t \in R \end{aligned}$.

c) osa strany *KL*

Je kolmá na stranu *KL*, prochází jejím středem $S_{KL}[2;5]$.

- Bod: $S_{KL}[2;5]$,
- směrový vektor osy strany *KL* je kolmý na směrový vektor přímky KL (a rovnoběžný se směrovým vektorem výšky v_m) $\Rightarrow \boldsymbol{u} = (1;-3)$.

$\Rightarrow$ Parametrické vyjádření osy strany *KL*: $\begin{aligned} x &= 2+t \\ y &= 5-3t; t \in R \end{aligned}$.

d) těžnice t_l

Přímka určená body $L[5;6]$, $S_{KM}[-2;1]$.

- Bod: $L[5;6]$,
- směrový vektor: $S_{KM} - L = (7;5) \Rightarrow \boldsymbol{u} = (7;5)$.

$\Rightarrow$ Parametrické vyjádření přímky, na které leží těžnice t_l: $\begin{aligned} x &= 5+7t \\ y &= 6+5t; t \in R \end{aligned}$.

e) střední příčka $S_{KL}S_{KM}$

Přímka určená body $S_{KL}[2;5]$, $S_{KM}[-2;1]$.

- Bod: $S_{KL}[2;5]$,

- směrový vektor: $S_{KM} - S_{KL} = (4;4) \Rightarrow \boldsymbol{u} = (1;1)$ (rovnoběžný se směrovým vektorem přímky LM).

$\Rightarrow$ Parametrické vyjádření přímky, na které leží střední příčka $S_{KL}S_{KM}$: $\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 5 + t; t \in R \end{array}$.

Př. 10: Petáková:
strana 106/cvičení 22 a) c)
strana 106/cvičení 23 a) c)

Shrnutí: Omezením hodnot parametru můžeme vyjádřit i části přímky.