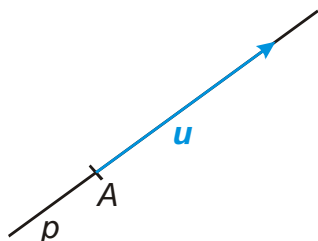


7.3.3 Vzájemná poloha parametricky vyjádřených přímek I

Předpoklady: 070302

Pedagogická poznámka: Tato hodina neobsahuje příliš mnoho příkladů. Postup velké části studentů je poměrně pomalý a často nestihnou spočítat ani obsah této hodiny. Považuji to za přirozené. Dosazování bodů do rovnice, výpočet průsečíků, to jsou všechno postupy, které používají poprvé, a snažím se, aby je opravdu prováděli sami bez opisování z tabule. Další hodiny pak pro ně budou jednodušší.

Parametrické vyjádření přímky: přímka je dána bodem a směrovým vektorem \Rightarrow píšeme $p(A; \mathbf{u})$.

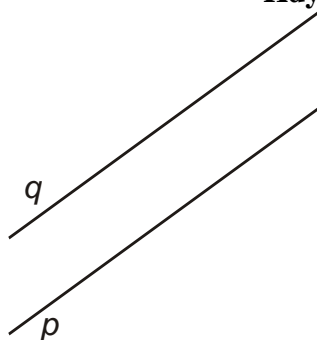


$X = A + t\mathbf{u}, t \in \mathbb{R}$ (ke každému bodu na přímce se dostaneme z bodu A posunutím o násobek vektoru \mathbf{u})

Jaké jsou možnosti pro vzájemnou polohu dvou přímek v rovině?

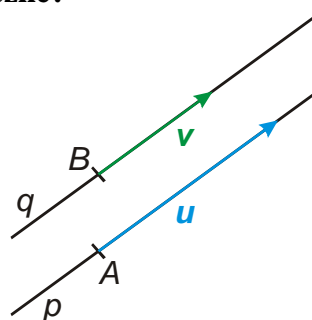
- rovnoběžné
- totožné
- různoběžné

Kdy jsou přímky rovnoběžné?



Přímky mají stejný směr.

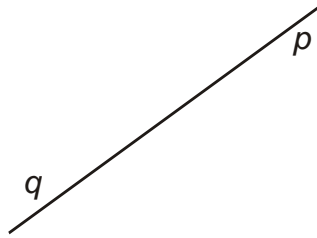
Přímky nemají žádný společný bod.



Směrový vektor přímky p je násobkem směrového vektoru přímky q , tedy $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$ (směrové vektory nemusí být stejné). Počáteční bod ani jedné z přímek neleží na druhé přímce.

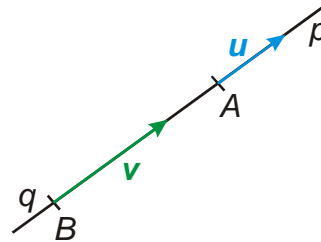
Př. 1: Vytvoř analogické tabulky pro zbývající dvě možné vzájemné polohy přímek v rovině.

Kdy jsou přímky totožné?



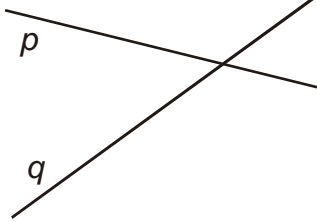
Přímky mají stejný směr.

Přímky mají všechny body společné.



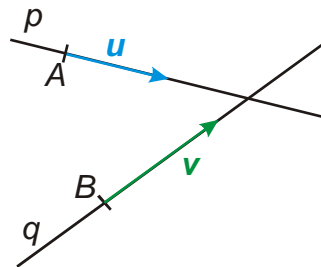
Směrový vektor přímky p je násobkem směrového vektoru přímky q , tedy $v = ku$ (směrové vektory nemusí být stejné). Počáteční bod každé z přímek leží na druhé přímce.

Kdy jsou přímky různoběžné?



Přímky nemají stejný směr.

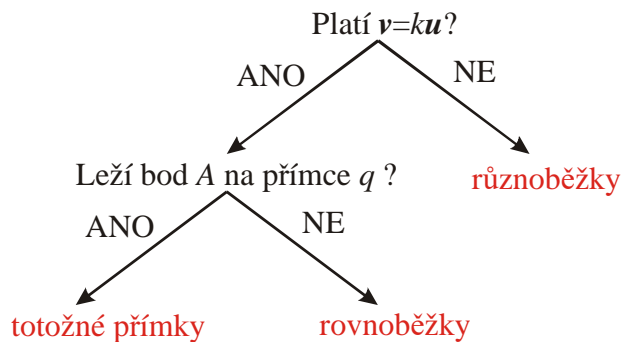
Přímky mají 1 společný bod.



Směrový vektor přímky p není násobkem směrového vektoru přímky q , tedy $v \neq ku$.

Př. 2: Navrhni postup, kterým rozhodneš o vzájemné poloze dvou parametricky zadaných přímek.

Máme dvě přímky $p(A; u)$ a $q(B; v)$.



Pedagogická poznámka: Diagram postupu sestavujeme po chvílce společně na tabuli. Je to však spíše kvůli zápisu než kvůli tomu, že by studenti měli problémy s pochopením situace.

Ačkoliv postup zjišťování vzájemné polohy není pro studenty příliš obtížný, při řešení následujících příkladů se objeví značné problémy, které však spíše souvisí s tím, že studenti pletou body a vektory dohromady, nemají přehled o tom, co k čemu patří a co čísla znamenají.

Př. 3: Urči vzájemnou polohy přímek $p(A; \mathbf{u})$ a $q(B; \mathbf{v})$, $A[-1; 3]$, $\mathbf{u} = (-1; 2)$, $B[1; 1]$, $\mathbf{v} = (2; -4)$. Pokud jsou přímky různoběžné, najdi jejich průsečík.

Zjistíme, zda jsou vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} rovnoběžné.

$$(2; -4) = k(-1; 2) \Rightarrow \begin{aligned} 2 &= -k \Rightarrow k = -2 \\ -4 &= 2k \Rightarrow k = -2 \end{aligned}$$

\Rightarrow Přímky jsou rovnoběžné nebo totožné \Rightarrow zjistíme, zda bod A leží na přímce q .

Parametrické vyjádření přímky q :

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 1 - 4t \end{aligned}$$

Dosadíme bod $A[-1; 3]$:

$$\begin{aligned} -1 &= 1 + 2t \\ 3 &= 1 - 4t \end{aligned}$$

$$-2 = 2t \Rightarrow t = -1$$

$$2 = -4t \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

\Rightarrow Bod A neleží na přímce $q \Rightarrow$ přímky p a q jsou rovnoběžné.

Pedagogická poznámka: Část studentů samostatně určuje totožnost přímek pomocí vektoru $B - A$. Pokud je vektor rovnoběžný se směrovými vektory obou přímek, jsou přímky totožné. Postup je to samozřejmě správný a je dobré, když jej studenti sami objeví. Dosazování do rovnice přímky je výhodnější jenom kvůli procvičení postupu, který budou častěji potřebovat.

Př. 4: Urči vzájemnou polohy přímek $p(A; \mathbf{u})$ a $q(B; \mathbf{v})$, $A[-1; 1]$, $\mathbf{u} = (3; 1)$, $B[1; 0]$, $\mathbf{v} = (-1; -2)$. Pokud jsou přímky různoběžné, najdi jejich průsečík.

Zjistíme, zda jsou vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} rovnoběžné (na první pohled vidíme, že nejsou, ale ověříme

to výpočtem): $(-1; -2) = k(3; 1) \Rightarrow \begin{aligned} -1 &= 3k \Rightarrow k = -\frac{1}{3} \\ -2 &= k \Rightarrow k = -2 \end{aligned}$

\Rightarrow Přímky jsou různoběžné \Rightarrow hledáme průsečík (bod, který leží na obou přímkách) \Rightarrow průsečík musí vyhovovat rovnicím obou přímek.

Parametrické vyjádření: přímka p :

$$\begin{aligned} x &= -1 + 3t \\ y &= 1 + t \end{aligned}$$

přímka q :

$$\begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 0 - 2t \end{aligned}$$

Průsečík vyhovuje oběma rovnicím.

$$\begin{aligned} -1 + 3t &= 1 - t \\ 1 + t &= 0 - 2t \end{aligned} \quad (\text{soustava dvou rovnic o jedné neznámé})$$

$$4t = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

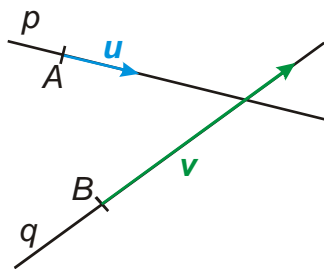
$$3t = -1 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$$

\Rightarrow Z obou rovnic vychází jiná hodnota parametru $t \Rightarrow$ soustava nemá řešení.

To ale není možné, přímky se musí protnout, protože nejsou rovnoběžné.

\Rightarrow Někde v postupu je chyba.

Špatně jsme značili parametry, nemůžeme v obou rovnicích použít stejný parametr t .



Parametr je číslo, kterým násobíme směrový vektor, abychom se z počátečního bodu dostali tam, kam chceme. Na obrázku je vidět, že pokud se chceme dostat z počátečních bodů obou přímek do průsečíku:

- vektor u budeme násobit číslem větším než 1,
- vektor v budeme násobit číslem menším než 1,

⇒ pro označení parametrů musíme použít dvě různá písmena, protože obecně dosahují různých hodnot.

Předchozí příklad ještě jednou a teď správně.

Parametrické vyjádření: přímka p :
$$\begin{matrix} x = -1 + 3t \\ y = 1 + t \end{matrix}, \quad \text{přímka } q: \begin{matrix} x = 1 - s \\ y = 0 - 2s \end{matrix}.$$

Průsečík vyhovuje oběma rovnicím.

$$\begin{matrix} -1 + 3t = 1 - s \\ 1 + t = 0 - 2s \end{matrix} \quad (\text{soustava dvou rovnic o dvou neznámých})$$

$$1 + t = 0 - 2s$$

$$3t + s = 2$$

$$t + 2s = -1$$

$$\Rightarrow s = 2 - 3t$$

$$t + 2(2 - 3t) = -1$$

$$t + 4 - 6t = -1$$

$$5 = 5t$$

$$t = 1$$

$$s = 2 - 3t = 2 - 3 \cdot 1 = -1$$

Dopočítáme průsečík obou přímek z parametrického vyjádření jedné z přímek:

$$p, t = 1: \begin{matrix} x = -1 + 3t = -1 + 3 \cdot 1 = 2 \\ y = 1 + t = 1 + 1 = 2 \end{matrix} \Rightarrow \text{průsečík má souřadnice } P[2; 2].$$

Můžeme si výsledek ověřit dosazením do druhé přímky:

$$q, s = -1: \begin{matrix} x = 1 - s = 1 - (-1) = 2 \\ y = 0 - 2s = -2(-1) = 2 \end{matrix} \Rightarrow \text{průsečík má souřadnice } P[2; 2].$$

Pedagogická poznámka: Chyba, která je v postupu, je velmi častá. Pokud necháte studenty postupovat samostatně, vyhne se jí maximálně pětina z nich. Jen velmi malá část z nich pak chybu odhalí, nemá tedy cenu příliš dlouho čekat, jestli ji objeví nebo ne.

Dalšími místy, kde budou studenti často potřebovat pomoc, je princip počítání průsečíku a hlavně výpočet souřadnic průsečíku z již určených hodnot parametrů. Automati klidně považují hodnoty parametrů za souřadnice průsečíku a napíší $P[1; -1]$.

Př. 5: Urči vzájemnou polohu přímk p, q , $p: \begin{matrix} x = -2 + 2t \\ y = 1 - t \end{matrix}, t \in R$, $q: \begin{matrix} x = 4 - 4s \\ y = -2 + 2s \end{matrix}, s \in R$.
Pokud jsou přímky různoběžné, najdi jejich průsečík.

Určíme počáteční body a směrové vektory.

$$p: \begin{matrix} x = -2 + 2t \\ y = 1 - t \end{matrix}, t \in R \Rightarrow A[-2; 1], \mathbf{u} = (2; -1)$$

$$q: \begin{matrix} x = 4 - 4s \\ y = -2 + 2s \end{matrix}, s \in R \Rightarrow B[4; -2], \mathbf{v} = (-4; 2)$$

$$\text{Zjistíme, zda jsou vektory } \mathbf{u} \text{ a } \mathbf{v} \text{ rovnoběžné: } (-4; 2) = k(2; -1) \Rightarrow \begin{matrix} -4 = 2k \Rightarrow k = -2 \\ 2 = -1 \cdot k \Rightarrow k = -2 \end{matrix}$$

\Rightarrow přímky jsou rovnoběžné nebo totožné \Rightarrow zjistíme, zda bod A leží na přímce q .

$$\text{Parametrické vyjádření přímky } q: \begin{matrix} x = 4 - 4s \\ y = -2 + 2s \end{matrix}$$

$$\text{Dosadíme bod } A[-2; 1]: \begin{matrix} -2 = 4 - 4s \\ 1 = -2 + 2s \end{matrix}$$

$$-6 = -4s \Rightarrow s = \frac{3}{2}$$

$$3 = 2s \Rightarrow s = \frac{3}{2}$$

\Rightarrow bod A leží na přímce $q \Rightarrow$ přímky p a q jsou totožné.

Př. 6: Najdi průsečíky přímk p, q z předchozího příkladu $p: \begin{matrix} x = -2 + 2t \\ y = 1 - t \end{matrix}, t \in R$, $q:$

$$\begin{matrix} x = 4 - 4s \\ y = -2 + 2s \end{matrix}, s \in R. \text{ Před vlastním výpočtem odhadni, jak bude vypadat řešení soustavy rovnic.}$$

Z řešení předchozího příkladu víme, že přímky p, q jsou totožné \Rightarrow mají nekonečně mnoho společných bodů \Rightarrow při řešení soustavy rovnic dojdeme k rovnosti $0 = 0$.

Společné body obou přímk vyhovují oběma rovnicím.

$$-2 + 2t = 4 - 4s$$

$$\underline{1 - t = -2 + 2s \Rightarrow t = 3 - 2s}$$

$$-2 + 2(3 - 2s) = 4 - 4s$$

$$-2 + 6 - 4s = 4 - 4s$$

$$0 = 0 \Rightarrow \text{přímky } p \text{ a } q \text{ mají nekonečně mnoho společných bodů.}$$

Př. 7: Petáková:
strana 107/cvičení 30 a) b) d)

Shrnutí: Společné body dvou přímk vyhovují rovnicím obou přímk.