7.3.4 Vzájemná poloha parametricky vyjádřených přímek II

Předpoklady: 070303

Př. 1: Urči vzájemnou polohu přímek *AB* a *CD*. $A[-2;3]$, $B[4;-1]$, $C[7;2]$, $D[-1;4]$. Pokud jsou přímky různoběžné, najdi jejich průsečík.

Přímka *AB*: $B-A=(6;-4) \Rightarrow \boldsymbol{u}=(3;-2)$ vydělíme vektor $B-A$ dvěma, abychom měli menší čísla a jednodušší počítání.
Přímka *CD*: $D-C=(-8;2) \Rightarrow \boldsymbol{v}=(-4;1)$.
Neplatí $\boldsymbol{v}=k\boldsymbol{u} \Rightarrow$ přímky jsou různoběžné $\Rightarrow$ hledáme průsečík.
Přímka *AB*: $\begin{matrix} x=-2+3t \\ y=3-2t, t\in R \end{matrix}$, přímka *CD*: $\begin{matrix} x=7-4s \\ y=2+s, s\in R \end{matrix}$.
Průsečík vyhovuje rovnicím obou přímek $\Rightarrow$ soustava rovnic.

$$-2+3t=7-4s$$
$$\underline{3-2t=2+s}$$
$$3t+4s=9$$
$$\underline{-2t-s=-1 \Rightarrow s=1-2t}$$
$$3t+4s=3t+4(1-2t)=9$$
$$3t+4-8t=9$$
$$-5t=5 \Rightarrow t=-1$$

Určíme průsečík: $\begin{matrix} x=-2+3t=-2+3(-1)=-5 \\ y=3-2t=3-2(-1)=5 \end{matrix}$.

Přímky *AB* a *CD* jsou různoběžné, protínají se v bodě $P[-5;5]$.

Pedagogická poznámka: „Krácení" směrových vektorů je dobré studentům opět ukázat. Ve sbírkách se takto směrové vektory upravují velice často, studenti však ze své vůle většinou nekrátí. Od tohoto okamžiku se snažím, aby to dělali.

Př. 2: Urči průsečíky přímek *p*: $\begin{matrix} x=1-2t \\ y=3+t, t\in R \end{matrix}$ a *q*: $\begin{matrix} x=2+4s \\ y=2-2s, s\in R \end{matrix}$. Na základě výsledku rozhodni, jaká je jejich vzájemná poloha.

Průsečík vyhovuje rovnicím obou přímek.

$$1-2t=2+4s$$
$$\underline{3+t=2-2s}$$
$$-2t-4s=1$$
$$\underline{t+2s=-1 \Rightarrow t=-1-2s}$$

Dosazení: $-2t-4s=-(-1-2s)-4s=1$.

$$2+4s-4s=1$$

$2=1 \Rightarrow$ přímky nemají žádný průsečík $\Rightarrow$ jsou rovnoběžné.

Pedagogická poznámka: Žáci mají občas tendenci (po špatném přečtení zadání) řešit příklad klasicky pomocí směrových vektorů. Jde to proti smyslu příkladu, který je v tom, aby se žáci naučili poznávat vzájemnou polohu i trošku jiným způsobem.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je pro studenty orientačně hodně náročný, třídu před ním synchronizuji. Po přečtení zadání nechávám chvilku na rozmyšlenou a pak se společně domluvíme na strategii řešení. Během práce studentů pak kontroluji zápis do sešitů, většina problémů souvisí s tím, že studenti ztratí přehled o tom, co vlastně počítají.

Př. 3: Rozhodni, které z následujících přímek jsou totožné.

a) $p(A,\boldsymbol{u})$, $A[4;1]$, $\boldsymbol{u}=(-2;2)$

b) q: $\begin{aligned} x &= 4+2t \\ y &= 1+t, t\in R \end{aligned}$

c) $r=\{[1-4t;4-2t], t\in R\}$

d) CD, $C[-2;-2]$, $D[6;2]$

Pokrátíme směrové vektory do nejjednoduššího tvaru:

p: $\boldsymbol{u}_p=(-2;2)\Rightarrow \boldsymbol{u}_p=(-1;1)$ q: $\boldsymbol{u}_q=(2;1)$

r: $\boldsymbol{u}_r=(-4;-2)\Rightarrow \boldsymbol{u}_r=(2;1)$ CD: $\boldsymbol{u}_{CD}=D-C=(8;4)\Rightarrow \boldsymbol{u}_{CD}=(2;1)$

Nejdříve srovnáme pokrácené směrové vektory přímek.

p: $\boldsymbol{u}_p=(-1;1)$ q: $\boldsymbol{u}_q=(2;1)$ r: $\boldsymbol{u}_r=(2;1)$ CD: $\boldsymbol{u}_{CD}=(2;1)$

Z přehledu směrových vektorů je vidět, že navzájem jsou svými násobky vektory $\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{CD}$ $\Rightarrow$ přímky *q*, *r* a *CD* mohou být totožné.

Zjistíme, zda výchozí body přímek *r* a *CD* leží na přímce *q*.

***r*:** Počáteční bod přímky *r* $R[1;4]$ dosadíme do vyjádření přímky *q*.

$1=4+2t \Rightarrow 2t=-3 \Rightarrow t=-\frac{3}{2}$

$4=1+t \Rightarrow t=3$

Bod *R* na přímce *q* neleží $\Rightarrow$ přímka *r* není totožná s přímkou *q*.

***CD*:** Bod přímky *CD*: $C[-2;-2]$ dosadíme do vyjádření přímky *q*.

$-2=4+2t \Rightarrow 2t=-6 \Rightarrow t=-3$

$-2=1+t \Rightarrow t=-3$

Bod *C* na přímce *q* leží $\Rightarrow$ přímka *CD* je totožná s přímkou *q*.

Ze čtyř zadaných přímek jsou totožné přímky *q* a *CD*.

Pedagogická poznámka: Porovnávání více přímek je dobrou příležitostí, jak přesvědčit žáky, aby si převáděli směrové vektory do nejjednoduššího tvaru.

Př. 4: Rozhodni, jak by vypadalo řešení předchozího příkladu v případě, že bychom během postupu použitého v řešení zjistili, že přímka *r* ani přímka *CD* nejsou totožné s přímkou *q*.

Pokud bychom zjistili, že ani jedna z přímek *r* a *CD* není totožná s přímkou *q*, museli bychom otestovat zda nejsou totožné přímky *r* a *CD*. Podle výsledku tohoto bychom rozhodli o konečném výsledku (žádné dvě přímky nejsou totožné nebo přímky *r* a *CD* jsou totožné).
Při řešení předchozího příkladu takové testování nemusíme provádět. Přímka *r* není totožná s přímkou *q*, se kterou je totožná přímka *CD* a proto nemohou být totožné ani přímky *r* a *CD*.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je synchronizační. Rychlejší části třídy trvá už jenom to, že musí pochopit zadání. Pokud nechápou ani potom, nechám je přeskočit na další příklad, s tím, že si nás poslechnou, až k příkladu dorazíme se zbytkem třídy. S pomalejšími se zadání probere jako součást předchozího příkladu. Při kontrole na tabuli doporučuji zakreslit přímku *q* a pak do obrázku postupně přidávat další přímky (podle výsledků testování). Studenti tak velice rychle pochopí, o co v příkladu jde.

Př. 5: Urči průsečíky přímek $p(A;\boldsymbol{u})$, $q(B;\boldsymbol{v})$. Na základě výsledku rozhodni, jaká je jejich vzájemná poloha $A[-2;-1]$, $\boldsymbol{u}=(2;3)$, $B[2;5]$, $\boldsymbol{v}=(-4;-6)$.

Přímka *p*: $\begin{matrix} x=-2+2t \\ y=-1+3t, t\in R \end{matrix}$, přímka *q*: $\begin{matrix} x=2-4s \\ y=5-6s, s\in R \end{matrix}$.

Průsečík vyhovuje rovnicím obou přímek.

$-2+2t=2-4s$

$-1+3t=5-6s$

$2t+4s=4 \quad /:2$

$3t+6s=6 \quad /:3$

$t+2s=2$

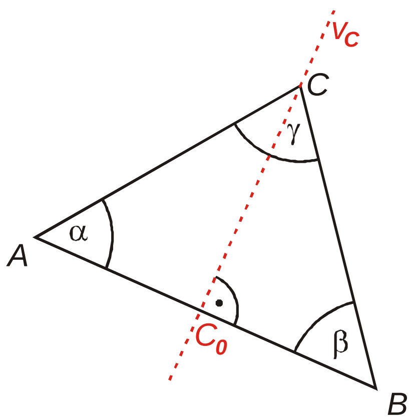
$t+2s=2$

Rovnice odečteme:

$0=0 \Rightarrow$ přímky *p*, *q* mají nekonečně mnoho společných bodů $\Rightarrow$ jsou totožné.

Pedagogická poznámka: Pokud máme málo času, přeskakujeme příklad 5 a počítáme příklad 6. Je důležitější.

Př. 6: Urči souřadnice paty výšky v_C v trojúhelníku *ABC*, $A[-2;-1]$, $B[6;-5]$, $C[3;4]$.



Z obrázku je zřejmé, že souřadnice bodu C_0 získáme jako průsečík přímky *AB* a výšky v_C.

Přímka *AB*: $B-A=(8;-4)\Rightarrow \boldsymbol{u}=(2;-1)$

$x=-2+2t$

$y=-1-t, t\in R$

Přímka v_C**:** Směrový vektor musí být kolmý na vektor přímky $AB \Rightarrow \boldsymbol{v} = (1;2)$ (prohození souřadnic a obrácení jednoho znaménka).

$x = 3 + s$

$y = 4 + 2s, s \in R$

Hledáme průsečík.

$$\begin{aligned} -2 + 2t &= 3 + s \\ -1 - t &= 4 + 2s \end{aligned}$$

$2t - s = 5 \Rightarrow s = 2t - 5$

$-t - 2s = 5$

$-t - 2s = -t - 2(2t - 5) = 5$

$-t - 4t + 10 = 5$

$-5t = -5$

$t = 1$

Vypočteme souřadnice průsečíku: $\begin{aligned} x &= -2 + 2t = -2 + 2 \cdot 1 = 0 \\ y &= -1 - t = -1 - 1 = -2 \end{aligned}$.

Pata výšky v_C má souřadnice $C_0[0;-2]$.

Př. 7: Jsou dána parametrická vyjádření dvou přímek p a q. Najdi co nejvíce postupů, kterými bys dokázal, že přímky p a q jsou totožné. U každého postupu uveď, jaké výsledky bys musel získat, abys totožnost obou přímek dokázal.

Několik možností:

- Porovnáme směrové vektory obou přímek (zjistíme, že jsou navzájem násobky), dosazením zkontrolujeme zda počáteční bod přímky p leží na přímce q (nebo obráceně) (zjistíme, že bod tam leží).
- Spočteme průsečíky obou přímek (zjistíme, že je jich nekonečně mnoho).
- Určíme si dva body ležící na přímce p a zkontrolujeme, zda leží na přímce q (najdeme dva body na q a zkontrolujeme, zda leží na přímce p) (zjistíme, že oba leží).

Shrnutí: Při výpočtech je výhodné používat nejjednodušší směrový vektor.