7.3.5 Obecná rovnice přímky I

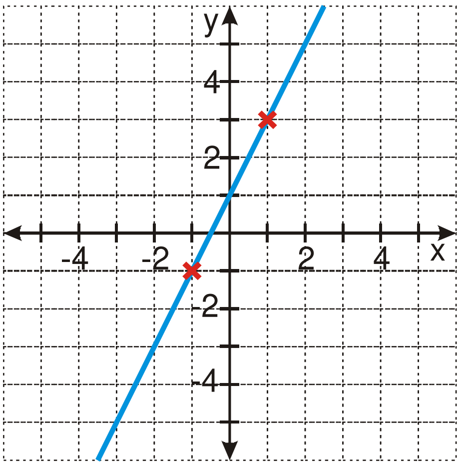
Předpoklady: 070304

Pedagogická poznámka: Úvodní příklad se nesmí příliš prodlužovat. Nemá cenu ztrácet čas tím, že si většina žáků nepamatuje lineární funkce. Raději rychle napíši řešení sám, aby na konci hodiny zbyl prostor pro dopočítání posledního příkladu.

Př. 1: Jsou dány body $A[-1;-1]$ a $B[1;3]$. Najdi parametrické vyjádření přímky *AB*. Nakresli přímku *AB* do kartézské soustavy souřadnic a najdi její další vyjádření.

Směrový vektor $B-A=(2;4) \Rightarrow \boldsymbol{u}=(1;2)$

Parametrické vyjádření: $\begin{aligned} x &= -1+t \\ y &= -1+2t, t \in R \end{aligned}$



Přímka je také grafem lineární funkce $y = ax + b$.
Spočítáme koeficienty:

- bod $[-1;-1] \Rightarrow -1 = a(-1)+b$,
- bod $[1;3] \Rightarrow 3 = a \cdot 1 + b$.

$$\begin{aligned} -1 &= -a + b \\ 3 &= a + b \end{aligned} \quad \text{(odečteme rovnice)}$$

$3-(-1) = a-(-a)+b-b$

$2a = 4 \Rightarrow a = 2$

Dosadíme do druhé rovnice:
$3 = a + b = 2 + b \Rightarrow b = 1$

Jde o funkci $y = 2x+1 \Rightarrow$ rovnice $2x - y + 1 = 0$ je také rovnicí přímky *AB*.

Zdá se, že rovnice $2x - y + 1 = 0$ je novým typem rovnice přímky *AB*. Parametrické vyjádření popisuje přímku *AB* $\Rightarrow$ mělo by „obsahovat i rovnici $2x - y + 1 = 0$. Jak získat rovnici $2x - y + 1 = 0$ z parametrického vyjádření?

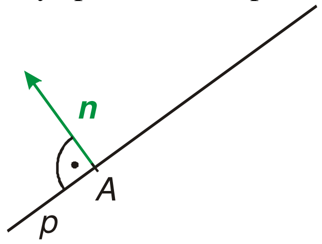
Neobsahuje parametr $\Rightarrow$ zkusíme se ho zbavit a ze dvou rovnic udělat jednu.

$x = -1 + t \Rightarrow t = x + 1$

$y = -1 + 2t = -1 + 2(x+1)$

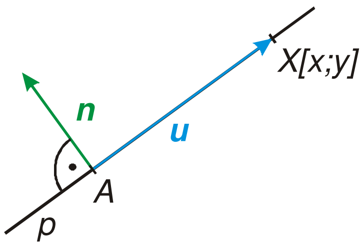
$y = -1 + 2x + 2$
$y = 2x + 1$
$2x - y + 1 = 0$ Opravdu jsme získali stejnou rovnici. Jaký je její význam?

Jiný způsob zadání přímky v rovině.



Přímku určuje bod a vektor, který je na přímku kolmý (**normálový vektor $\boldsymbol{n}$**) (takto jsme rýsovali kolmice).

Jaký je normálový vektor přímky AB?
Směrový vektor $\boldsymbol{u} = (1;2)$ $\Rightarrow$ normálový vektor $\boldsymbol{n} = (2;-1)$ (je kolmý na směrový).
Jak poznáme, že bod $X[x;y]$ leží na přímce AB?



Pokud bod X leží na přímce p, vektor $X - A$ je kolmý na normálový vektor $\Rightarrow$ jejich skalární součin je nulový.

Zapíšeme předchozí podmínku rovnicí.

Konkrétní příklad:
$A[-1;-1]$, $\boldsymbol{n} = (2;-1)$
$X - A = (x+1; y+1)$, $\boldsymbol{n} = (2;-1)$
$(X - A)\boldsymbol{n} = 0$
$(x+1; y+1)(2;-1) = 2x + 2 - y - 1 = 0$
$2x - y + 1 = 0$
Teď už víme, kde se rovnice vzala.

Obecný postup:
$P[p_1; p_2]$, $\boldsymbol{n} = (a;b)$
$X - A = (x - p_1; y - p_2)$, $\boldsymbol{n} = (a;b)$
$(X - A)\boldsymbol{n} = 0$
$(x - p_1; y - p_2)(a;b) = ax - ap_1 + by - bp_2 = 0$
$ax + by - ap_1 - bp_2 = ax + by + c = 0$
$ax + by + c = 0$ **- obecná rovnice přímky**

- Ke každé přímce p lze najít taková čísla a, b, c, aby $X[x;y] \in p$ právě když $ax + by + c = 0$.
- Platí i obráceně:
  Pro každou trojici reálných čísel a, b, c, kde alespoň jedno z čísel a, b je nenulové, je množina všech bodů $X[x;y]$ pro které platí $ax + by + c = 0$, přímka.

Rovnice $ax + by + c = 0$, kde alespoň jedno z čísel a, b je nenulové, se nazývá obecná rovnice přímky. Čísla a, b jsou souřadnice normálového vektoru $\boldsymbol{n} = (a;b)$ této přímky, číslo c získáme dosazením libovolného bodu přímky do rovnice.

Př. 2: Urči obecnou rovnici přímky CD, $C[2;2]$, $D[-1;3]$.

Směrový vektor: $\boldsymbol{u} = D - C = (-3;1)$

Normálový vektor: $\boldsymbol{n} = (1;3)$
Obecná rovnice přímky: $ax + by + c = 1 \cdot x + 3y + c = 0$.
Hledáme koeficient c dosazením bodu C: $1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + c = 0 \Rightarrow c = -8$
Obecná rovnice přímky: $x + 3y - 8 = 0$.
Co kdybychom dosadili bod D?
Zkusíme: $1 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 + c = 0 \Rightarrow c = -8$ - stejný výsledek

Pedagogická poznámka: Na předchozím příkladu je dobře vidět, zda žáci vůbec čtou modré rámečky, které opisují do sešitu. Nezanedbatelná část z nic vůbec neví, co má dělat, další sice vytvoří rovnici z normálového vektoru, ale při výpočtu parametru c opakuje skalární násobení z odvozování. Pokud se někdo ptá, jestli záleží na tom, který z bodů do rovnice dosadí, říkám, že si to má vyzkoušet.

Př. 3: Rozhodni, zda na přímce CD z předchozího příkladu leží body $E[1;2]$ a $F[5;1]$.

Dosazením bodů do rovnice přímky:
bod $E[1;2]$: $x + 3y - 8 = 1 + 3 \cdot 2 - 8 = -1 \neq 0$ rovnice nevyšla $\Rightarrow$ bod E neleží na přímce CD,
bod $F[5;1]$: $x + 3y - 8 = 5 + 3 \cdot 1 - 8 = 0$ rovnice vyšla $\Rightarrow$ bod F leží na přímce CD.

Pedagogická poznámka: I když se snažím, aby všichni studenti sestavili svoji první obecnou rovnici přímky sami podle návodu v rámečku, najde se jich pár, kteří potřebují něco ukázat. Proto následuje druhý příklad, který musí už všichni udělat samostatně. Jeho výsledky pak dále využijeme. Rychlejší studenti mohou ihned přejít na příklad 4 s tím, že si pod příkladem 3 vynechají několik řádek.

Př. 4: Urči obecnou rovnici přímky KL, $K[-2;1]$, $L[2;3]$.

Směrový vektor: $L - K = (4;2) \Rightarrow \boldsymbol{u} = (2;1)$.
Normálový vektor: $\boldsymbol{n} = (1;-2)$.
Obecná rovnice přímky: $ax + by + c = 1 \cdot x - 2y + c = 0$.
Hledáme koeficient c dosazením bodu K: $1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = 4$.
Obecná rovnice přímky: $x - 2y + 4 = 0$.

Co kdybychom nezkrátili směrový vektor?
Zkusíme: Normálový vektor: $\boldsymbol{n} = (2;-4)$
Obecná rovnice přímky: $ax + by + c = 2 \cdot x - 4y + c = 0$.
Hledáme koeficient c dosazením bodu E: $2 \cdot (-2) - 4 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = 8$.
Obecná rovnice přímky: $2x - 4y + 8 = 0$.

Pedagogická poznámka: Při hodině jsme získali všechny čtyři očekávatelné výsledky, kromě uvedených výše i jejich varianty vynásobené –1.

Pro jednu přímku vyšly různé obecné rovnice:
- $x - 2y + 4 = 0$,

* $-x+2y-4=0$,
* $2x-4y+8=0$,
* $-2x+4y-8=0$,

$\Rightarrow$ pro jednu přímku existuje více obecných rovnic.
Je mezi nimi nějaký vztah?

* Rovnice jsou navzájem svými násobky.

Je to jasné, když rovnici vynásobíme nenulovým číslem, množina řešení se nezmění.

Př. 5: Obecný tvar obecné rovnice přímky $ax+by+c=0$ obsahuje celkem pět písmen, která můžeme roztřídit do dvou skupin podle významu, který v rovnici hrají. Roztřiď písmena do dvou skupin a popiš význam písmen v každé skupině.

Dvě skupiny písmen:

* *a*, *b*, *c*: písmena, která rozlišují přímky mezi sebou (různé přímky charakterizují různé dosazené hodnoty), u konkrétní přímky místo těchto písmen píšeme konkrétní čísla,
* *x*, *y*: písmena, která slouží jako „prázdná“ místa pro dosazení bodu, o kterém chceme zjistit, zda leží na přímce nebo nikoli (na těchto místech zůstávají písmena i poté, co jsme určili rovnici konkrétní přímky).

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je důležitý a trvám na tom, aby si ho do sešitu napsali hlavně žáci, kteří ho nevyřešili samostatně. Je ukázkou přemýšlení, které žákům, kteří mají s matematikou problémy, zoufale chybí.

Obecná rovnice přímky je první ukázkou nejčastějšího typu rovnice v analytické geometrii. Rovnice $ax+by+c=0$ obsahuje pět písmen, která můžeme rozdělit do dvou skupin:

* a,b,c jsou koeficienty, které odlišují různé přímky od sebe. Pro konkrétní přímku jsou nahrazeny čísly,
* x, y jsou „prázdná místa“ rovnice, do kterých dosazujeme souřadnice bodů, o kterých chceme zjistit, zda leží na přímce nebo ne.

Pedagogická poznámka: Následující příklad se v hodině nestíhá, všichni mají za povinnost ho dokončit doma.

Př. 6: Je dán trojúhelník *ABC*; $A[-2;3]$, $B[4;-1]$, $C[2;5]$. Urči obecné rovnice přímek, na kterých leží: a) strana *AB*; b) výška v_c; c) osa strany *AB*; d) těžnice t_a; e) střední příčka $S_{AB}S_{AC}$.

a) strana *AB*

* Normálový vektor: $\boldsymbol{AB}=B-A=(6;-4)\Rightarrow \boldsymbol{n}=(2;3) \Rightarrow 2x+3y+c=0$.
* Dosadíme bod $A[-2;3]$: $2(-2)+3\cdot 3+c=0 \Rightarrow c=-5$.

$\Rightarrow$ Obecná rovnice přímky *AB*: $2x+3y-5=0$.

b) výška v_c

* Normálový vektor je shodný se směrovým vektorem přímky *AB*: $\Rightarrow \boldsymbol{n}=(3;-2) \Rightarrow$ $3x-2y+c=0$.

- Dosadíme bod $C[2;5]$: $3\cdot 2-2\cdot 5+c=0 \Rightarrow c=4$.

$\Rightarrow$ Obecná rovnice přímky na které leží výška v_c: $3x-2y+4=0$.

c) osa strany *AB*

- Normálový vektor je shodný se směrovým vektorem přímky *AB*: $\Rightarrow \boldsymbol{n}=(3;-2) \Rightarrow$ $3x-2y+c=0$.
- Dosadíme bod $S_{AB}[1;1]$: $3\cdot 1-2\cdot 1+c=0 \Rightarrow c=-1$.

$\Rightarrow$ Obecná rovnice osy strany *AB*: $3x-2y-1=0$.

d) těžnice t_a

Přímka určená body $A[-2;3]$, $S_{BC}[3;2]$.

- Normálový vektor: $\boldsymbol{AS}_{BC}=S_{BC}-A=(5;-1)\Rightarrow \boldsymbol{n}=(1;5) \Rightarrow x+5y+c=0$.
- Dosadíme bod $A[-2;3]$: $(-2)+5\cdot 3+c=0 \Rightarrow c=-13$.

$\Rightarrow$ Obecná rovnice přímky, na které leží těžnice t_c: $x+5y-13=0$.

e) střední příčka $S_{AB}S_{AC}$

Přímka určená body $S_{AB}[1;1]$, $S_{AC}[0;4]$.

- Normálový vektor: $\boldsymbol{S}_{AB}\boldsymbol{S}_{AC}=S_{AC}-S_{AB}=(-1;3)\Rightarrow \boldsymbol{n}=(3;1) \Rightarrow 3x+y+c=0$.
- Dosadíme bod $S_{AB}[1;1]$: $3\cdot 1+1+c=0 \Rightarrow c=-4$.

$\Rightarrow$ Obecná rovnice přímky, na které leží střední příčka $S_{AB}S_{AC}$: $3x+y-4=0$.

Př. 7: Petáková:
strana 105/cvičení 1 a) c) d) e) (pouze obecné rovnice)

Shrnutí: Rovnice $ax+by+c=0$ s alespoň jedním nenulovým číslem *a*, *b* popisuje přímku v rovině. Koeficienty *a*, *b* se rovnají složkám normálového vektoru $\boldsymbol{n}=(a;b)$.