7.3.6 Obecná rovnice přímky II

Předpoklady: 070305

Pedagogická poznámka: Hodina neobsahuje novou látku. Studenti si mají samostatným počítáním upevnit dosud probrané.

Př. 1: Napiš obecnou rovnici přímky *AB*, $A[1;-2]$, $B[2;2]$.

Směrový vektor: $B-A=(1;4)$.

Normálový vektor: $\boldsymbol{n}=(4;-1)$.

Obecná rovnice přímky: $ax+by+c=0 \Rightarrow 4x-y+c=0$.

Hledáme koeficient *c* dosazením bodu *A*: $4\cdot 1-1(-2)+c=0 \Rightarrow c=-6$.

Obecná rovnice přímky: $4x-y-6=0$.

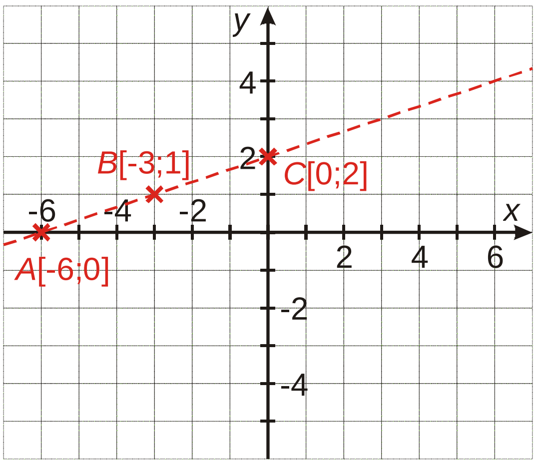
Př. 2: Je dána přímka *p*: $x-3y+6=0$. Najdi souřadnice tři bodů, které leží na této přímce a zakresli tyto body do soustavy souřadnic.

Rovnice svazuje hodnot souřadnic *x* a *y* $\Rightarrow$ jednu souřadnici si volíme, druhou dopočítáváme. Lepší je volit si souřadnici *y* (před *x* je koeficient 1 $\Rightarrow$ nebudeme muset dělit a nebudou vycházet zlomky). Vyjádříme si *x* pro snazší výpočty:

$x-3y+6=0 \qquad /+3y-6$

$x=3y-6$

- $y=0$: $x=3y-6=3\cdot 0-6=-6 \Rightarrow$ bod $A[-6;0]$,
- $y=1$: $x=3y-6=3\cdot 1-6=-3 \Rightarrow$ bod $B[-3;1]$,
- $y=2$: $x=3y-6=3\cdot 2-6=0 \Rightarrow$ bod $C[0;2]$,
- …



Body leží na přímce.

Pedagogická poznámka: Následující příklad není součástí předchozí hodiny úmyslně. Jde o to, aby se otestovali, co jsou schopni z minulé hodiny studenti rychle použít.

Př. 3: Urči, které z následujících rovnic určují stejnou přímku.
a) $2x-y+3=0$ b) $2x-3y+3=0$ c) $4x+6y+6=0$
d) $-x+\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}=0$ e) $4x-6y+3=0$

Všechny rovnice upravíme tak, aby před *x* byla jednička.

a) $2x-y+3=0 \Rightarrow x-\frac{y}{2}+\frac{3}{2}=0$

b) $2x-3y+3=0 \Rightarrow x-\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}=0$

c) $4x+6y+6=0 \Rightarrow x+\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}=0$

d) $-x+\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}=0 \Rightarrow x-\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}=0$

e) $4x-6y+3=0 \Rightarrow x-\frac{3}{2}y+\frac{3}{4}=0$

Stejnou přímku určují rovnice b) a d).

Dodatek: Rovnice samozřejmě můžeme upravit i jinak, například tak, aby před *x* byla vždy dvojka. Tím si ušetříme část dělení a získané rovnice budou obsahovat méně zlomků.

Př. 4: Rozhodni, jak můžeme u přímek zapsaných pomocí obecné rovnice, rozhodnout o jejich rovnoběžnosti. Které z přímek uvedených v předchozím příkladu jsou rovnoběžné s přímkou $2x-3y+3=0$?

Přímky jsou rovnoběžné, když jejich normálové vektory mají stejný směr $\Rightarrow$ normálové vektory takových přímek jsou svými násobky.
Při hledání rovnoběžných přímek se zabýváme pouze koeficienty *a*, *b* $\Rightarrow$ s přímkou $2x-3y+3=0$ jsou z přímek zadaných v příkladu 4 rovnoběžné přímky $-x+\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}=0$ (ta je s ní totožná) a $4x-6y+3=0$.

Př. 5: Najdi obecnou rovnici přímky, která je rovnoběžná s přímkou $2x-3y+1=0$ a prochází bodem $K[-2;3]$.

Rovnoběžka s přímkou $2x-3y+1=0$ má stejný normálový vektor (nebo jeho násobek, ale to je komplikace) $\Rightarrow$ rovnice se bude lišit pouze v parametru *c*.
$2x-3y+c=0$
Dosadíme bod $K[-2;3]$: $2x-3y+c=2(-2)-3\cdot 3+c=0 \Rightarrow c=13$.
Přímka rovnoběžná s přímkou $2x-3y+1=0$ procházející bodem $K[-2;3]$ má rovnici $2x-3y+13=0$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad dobře dokumentuje problémy části studentů s matematikou. Všechny informace potřebné k jeho vyřešení studenti mají, přesto čekají až jim ho někdo ukáže, protože takový příklad ještě nedělali.

Př. 6: Najdi obecnou rovnici přímky, která je kolmá na přímku $2x-3y+1=0$ a prochází bodem $K[-2;3]$.

Normálový vektor hledané kolmice je kolmý na vektor $(2;-3)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n}=(3;2)$ $\Rightarrow$ $3x+2y+c=0$.

Dosadíme bod $K[-2;3]$: $3(-2)+2\cdot 3+c=0$ $\Rightarrow$ $c=0$.

Přímka kolmá na přímku $2x-3y+1=0$ procházející bodem $K[-2;3]$ má rovnici $3x+2y=0$.

Př. 7: Urči vzájemnou polohu přímek $p:3x+2y+1=0$ a $q:x-3y+4=0$. Pokud jsou přímky různoběžné, urči jejich průsečík.

Stejně jako u parametrického vyjádření se nejdříve zajímáme o směr přímek (který udávají vektory, tentokrát normálové): $\boldsymbol{n}_p=(3;2)$ $\boldsymbol{n}_q=(1;-3)$

Normálové vektory nemají stejný směr (jeden není násobek druhého) $\Rightarrow$ přímky jsou různoběžné.

Hledáme průsečík (bod, který vyhovuje oběma rovnicím) $\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic.

$$3x+2y+1=0$$
$$x-3y+4=0$$

$$3x+2y+1=0$$
$$[\![1]\!]-3[\![2]\!] \qquad 11y-11=0$$

$y=1$

Dopočítáme *x*: $x-3y+4=x-3\cdot 1+4=0$.

$x=-1$

Přímky *p* a *q* jsou různoběžné a protínají se v bodě $P[-1;1]$.

Př. 8: Najdi společné body přímek $p=\{[2-3t;1+2t],t\in R\}$ a $r:2x+3y-7=0$. Podle počtu nalezených bodů rozhodni o jejich vzájemné poloze. Jaký vztah musí být mezi směrovým vektorem přímky *p* a normálovým vektorem přímky *r*? Ověř.

Přímka *p*: $\begin{array}{l} x=2-3t \\ y=1+2t, t\in R \end{array}$, přímka *r*: $2x+3y-7=0$.

Společné body obou přímek musí vyhovovat oběma vyjádřením $\Rightarrow$ soustava tří rovnic o třech neznámých.

$x=2-3t$

$y=1+2t$ $\Rightarrow$ Z první a druhé rovnice dosadíme do třetí.

$2x+3y-7=0$

$2(2-3t)+3(1+2t)-7=0$

$4-6t+3+6t-7=0$

$0=0$ $\Rightarrow$ Přímky mají nekonečně mnoho společných bodů (za *t* můžeme dosadit cokoliv) $\Rightarrow$ přímky *p* a *r* jsou totožné.

Přímky mají stejný směr $\Rightarrow$ normálový vektor přímky *r* musí být kolmý nejen na přímku *r*, ale i na přímku *p* $\Rightarrow$ musí platit $\boldsymbol{n}_r \cdot \boldsymbol{u}_p = 0$.

$(-3;2)(2;3) = (-3)\cdot 2 + 2\cdot 3 = 0$

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu žáci často začnou řešit vzájemnou polohu z vektorů místo počítání průsečíků.

Pedagogická poznámka: Následující příklad vyžaduje pouze orientaci ve směrových a normálových vektorech. Snažím se (i přeskočením některých předchozích příkladů), aby si ozkoušeli všichni. Studenti většinou pro přímku nepoužijí rovnou vektor $\boldsymbol{u}$, ale vektor na něj kolmý. Říkám jim nejdříve jenom to, aby si ujasnili, co který z jejich vektorů znamená, případně si nakreslili obrázek. Při vysvětlování před třídou ho na tabuli kreslím také. Problém, který příklad obnažuje, se řeší celou následující hodinu.

Př. 9: Je dána přímka $p(A;\boldsymbol{u})$; $A[1;-2]$, $\boldsymbol{u} = (-1;2)$. Najdi obecnou rovnici přímky *r*, která je na přímku *p* kolmá a prochází bodem *A*.

Hledaná přímka je kolmá na přímku *p* $\Rightarrow$ normálový vektor přímky *r* se rovná směrovému vektoru přímky *p*: $\boldsymbol{n}_r = \boldsymbol{u}_p = (-1;2)$ $\Rightarrow$ $-x+2y+c=0$.

Dosadíme bod $A[1;-2]$: $-1+2(-2)+c=0$ $\Rightarrow$ $c=5$.

Přímka *r* má obecnou rovnici $-x+2y+5=0$.

Př. 10: Najdi parametrické vyjádření přímky $p: 3x-4y+5=0$.

Pro parametrické vyjádření potřebujeme:

- směrový vektor: je kolmý na normálový $\boldsymbol{n}_p = (3;-4)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{s}_p = (4;3)$,
- jeden bod přímky: zvolíme si jednu souřadnici, druhou spočítáme (například $x=1$ $\Rightarrow$ $3x-4y+5 = 3\cdot 1-4y+5=0$ $\Rightarrow$ $y=2$ $\Rightarrow$ $A[1;2]$.

Parametrické vyjádření přímky *p*: $\begin{aligned} x &= 1+4t \\ y &= 2+3t, t\in R \end{aligned}$.

Dodatek: Je možné postupovat i jinak:
vypočítat z obecné rovnice dva body a sestavit parametrické vyjádření s jejich pomocí,
jednu proměnou vyjádřit pomocí parametru (1. rovnice $x=t$) a tímto vyjádřením ji nahradit v obecné rovnici (2. rovnice $3t-4y+5=0$ $\Rightarrow$ $y=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}t$),
Vyjádření, která získáme, budou obecně různá..

Př. 11: Petáková:
strana 105/cvičení 5
strana 105/cvičení 10
strana 106/cvičení 13 a)

Shrnutí: