7.3.8 Analytické vyjádření části přímky

Předpoklady: 070302

Pedagogická poznámka: Hodina byla původně zařazena hned za probrání parametrického vyjádření. Po přesunu byla předělána a zejména odpovědi na posledního otázku prvního příkladu jsou zatím odhadem ne zkušeností. Stejně tak není ozkoušen závěr hodiny.

Pedagogická poznámka: Řešení prvního příkladu je v podstatě skupinovou prací, nejdříve ve dvojicích, později i větších skupinách. Objevují se dvě možná řešení (bez zkracování směrového vektoru a se zkracováním směrového vektoru). Bystřejší žáci mají poměrně rychle jasno, slabší mnohdy po prvním příkladu příliš netuší, co se děje (pro ně je nutné řešit jednoduchý příklad 2, který mohou Ti rychlejší přeskočit).

Př. 1: Jsou dány body $A[-2;3]$ a $B[2;-1]$. Najdi parametrické vyjádření přímky *AB*. Leží na přímce *AB* bod $C[6;4]$? Urči souřadnice bodu $D[1;?]$ tak, aby ležel na přímce *AB*. Na které části přímky *AB* bod *D* leží? Jak je možné poznat polohu bodu na přímce z hodnoty parametru *t*?

Na parametrické vyjádření přímky potřebujeme:

- bod: $A[-2;3]$,
- směrový vektor: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB} = B - A = (4;-4)$.

$\Rightarrow$ Parametrické vyjádření přímky *AB*: $\begin{array}{l} x = -2 + 4t \\ y = 3 - 4t, t \in R \end{array}$.

Dosadíme **bod *C***: $\begin{array}{l} 6 = -2 + 4t \\ 4 = 3 - 4t \end{array}$.

Vypočteme z obou rovnic parametr *t*.

$$\begin{array}{ll} 6 = -2 + 4t & -4 = 3 - 4t \\ 8 = 4t \Rightarrow t = 2 & -7 = -4t \Rightarrow t = \dfrac{-7}{-4} = \dfrac{7}{4} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Hodnoty parametru *t* se liší $\Rightarrow$ Bod *C* neleží na přímce *AB*.

Dosadíme **bod *D***: $\begin{array}{l} 1 = -2 + 4t \\ y = 3 - 4t \end{array}$.

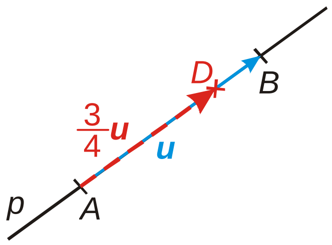
Soustava dvou rovnic o dvou neznámých. Z první vypočteme *t* a dosadíme do druhé.

$$\begin{array}{ll} 1 = -2 + 4t & \\ 3 = 4t \Rightarrow t = \dfrac{3}{4} & y = 3 - 4t = 3 - 4 \cdot \dfrac{3}{4} = 0 \end{array}$$

Bod *D* má souřadnice $D[1;0]$.

Bod *D* leží zřejmě na úsečce *AB*, protože jak jeho *x*-ová tak jeho *y*-ová souřadnice „leží“ mezi souřadnicemi bodů $A[-2;3]$ a $B[2;-1]$.

Určení polohy bodu *D* z hodnoty parametru *t*. Nakreslíme si obrázek:



Bod *D* je určen hodnotou parametru $t=\frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ z bodu *A* se do bodu *D* dostaneme posunutím o vektor $\frac{3}{4}\boldsymbol{u}$ $\Rightarrow$ bod *D* musí ležet na úsečce *AB* (do bodu *B* bychom se dostali při posunutí o celý směrový vektor).

Druhý typ řešení.
Na parametrické vyjádření přímky potřebujeme:

- bod: $A[-2;3]$,
- směrový vektor: $B-A=(4;-4)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{u}=(1;-1)$.

$\Rightarrow$ Parametrické vyjádření přímky *AB*: $\begin{array}{l} x=-2+t \\ y=3-t, t\in R \end{array}$.

Dosadíme **bod *C***: $\begin{array}{l} 6=-2+t \\ 4=3-t \end{array}$.

Vypočteme z obou rovnic parametr *t*.

$6=-2+t$ $\qquad\qquad$ $-4=3-t$

$8=t\Rightarrow t=8$ $\qquad\qquad$ $-7=-t\Rightarrow t=7$

$\Rightarrow$ Hodnoty parametru *t* se liší $\Rightarrow$ Bod *C* neleží na přímce *AB*.

Dosadíme **bod *D***: $\begin{array}{l} 1=-2+t \\ y=3-t \end{array}$.

Soustava dvou rovnic o dvou neznámých. Z první vypočteme *t* a dosadíme do druhé.

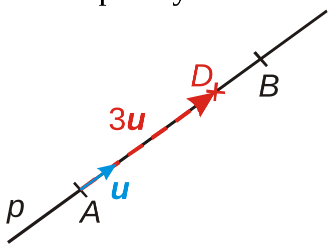
$1=-2+t$

$3=t\Rightarrow t=3$ $\qquad\qquad$ $y=3-t=3-3=0$

Bod *D* má souřadnice $D[1;0]$.

Bod *D* leží zřejmě na úsečce *AB*, protože jak jeho *x*-ová tak jeho *y*-ová souřadnice „leží“ mezi souřadnicemi bodů $A[-2;3]$ a $B[2;-1]$.

Určení polohy bodu *D* z hodnoty parametru *t*. Nakreslíme si obrázek:



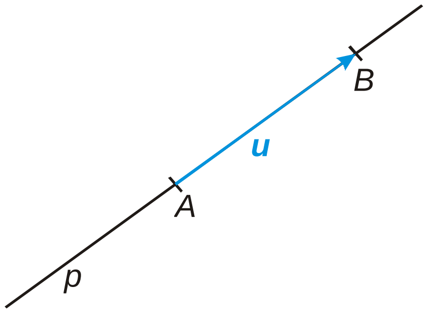
Bod *D* je určen hodnotou parametru $t=3$ $\Rightarrow$ z bodu *A* se do bodu *D* dostaneme posunutím o vektor $3\boldsymbol{u}$ $\Rightarrow$ bod *D* musí ležet na úsečce *AB* (do bodu *B* bychom se dostali při posunutí o vektor $4\boldsymbol{u}$).

Proč se nespokojíme s odhadem ze souřadnic (případně si body nenakreslíme) a řešíme polohu bodu na přímce přes hodnoty parametru?
Několik důvodů:

- Pokud ověřujeme polohu bodu na přímce, máme hodnotu parametru spočtenou a její využití neznamená žádnou další práci.
- Matematika se nerozhoduje podle lidského „vidíme to na obrázku“, už jen kvůli počítačům potřebujeme rozhodnutí na základě porovnávání hodnot.

- Pomocí hodnoty parametru můžeme na přímce snadno vypočítávat jen body na části, která nás zajímá.

Př. 2: Do obrázku přímky p dané parametricky bodem A a směrovým vektorem $\boldsymbol{u} = B - A$ načrtni body X_1, X_2 a X_3, které získáme, když do parametrického vyjádření dosadíme hodnoty parametru t: a) $t_1 = 0,3$, b) $t_2 = 1,5$, c) $t_3 = -0,5$.

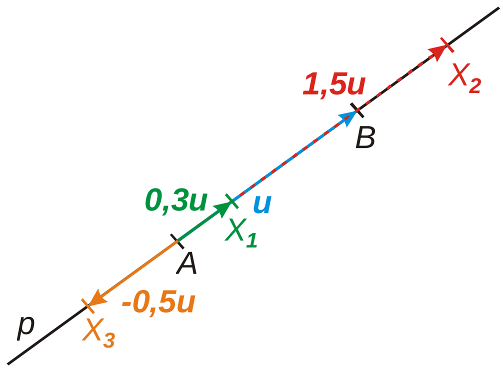


Napíšeme si dosazení hodnot parametru a do obrázku nakreslíme odpovídající bod.

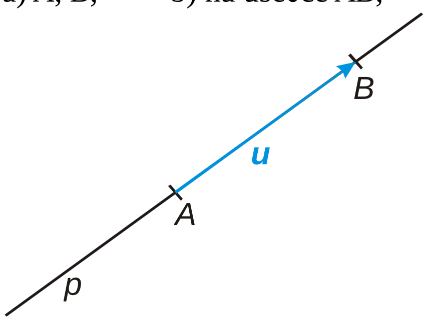
$X_1 = A + t\boldsymbol{u} = A + 0,3\boldsymbol{u}$

$X_2 = A + t\boldsymbol{u} = A + 1,5\boldsymbol{u}$

$X_3 = A + t\boldsymbol{u} = A - 0,5\boldsymbol{u}$



Př. 3: Na obrázku je nakreslena přímka p. Její parametrické vyjádření je dáno bodem A a směrovým vektorem $\boldsymbol{u} = B - A$. Urči hodnoty parametru t, které budou v parametrickém vyjádření $X = A + t\boldsymbol{u}$ náležet bodům:
a) A, B, b) na úsečce AB, c) polopřímce AB, d) polopřímce BA.



a)
Do bodu A se z bodu A dostaneme posunutím o nulový vektor $\Rightarrow$ $t = 0$.
Do bodu B se z bodu A dostaneme posunutím o vektor $\boldsymbol{u}$ $\Rightarrow$ $t = 1$.
b)
Pokud chceme získat vnitřní body na úsečce AB, musíme se z bodu A posunovat o kladné násobky vektoru $\boldsymbol{u}$ menší než 1 $\Rightarrow$ $t \in \langle 0;1 \rangle$.
c)

Pokud chceme získat vnitřní body na polopřímce *AB*, musíme se z bodu *A* posunovat o kladné násobky vektoru $\boldsymbol{u}$ $\Rightarrow$ $t \in \langle 0;\infty)$.

d)

Bodům na polopřímce *BA* odpovídají hodnoty parametru $t \in (-\infty;1\rangle$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad vyřeší samostatně naprostá většina studentů. Problémy se vyskytují maximálně v bodu a), v ostatních případech pak jde pouze o uzavřenost intervalů, v případě bodu d) pak nepozornost s hranou intervalu.

Předchozí příklad ukazuje velkou výhodu parametrického vyjádření přímky. Mimo celé přímky můžeme omezováním hodnot parametru *t* vyjádřit i její části: polopřímky, úsečky.

Př. 4: Urči polohu bodu $C[-5;2]$ na přímce *AB*; $A[1;5]$, $B[-3;3]$. K vyřešení využij parametrické vyjádření přímky se směrovým vektorem $B-A$ (bez krácení). Bylo by možné polohu bodu *C* na přímce určit i jinak (za předpokladu, že bod *C* na přímce *AB* leží)?

Parametrické vyjádření přímky *AB*:

- bod: $A[1;5]$,
- směrový vektor: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB} = B - A = (-4;-2)$.

$\Rightarrow$ Parametrické vyjádření přímky *AB*: $\begin{array}{l} x = 1-4t \\ y = 5-2t, t \in R \end{array}$.

Dosadíme **bod *C***: $\begin{array}{l} -5 = 1-4t \\ 2 = 5-2t \end{array}$.

Soustava dvou rovnic o dvou neznámých. Z první vypočteme *t* a dosadíme do druhé.

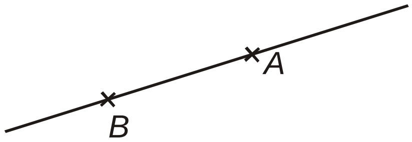
$-5 = 1-4t$ $\qquad$ $2 = 5-2t$

$-6 = -4t \Rightarrow t = \frac{3}{2}$ $\qquad$ $-3 = -2t \Rightarrow t = \frac{3}{2}$

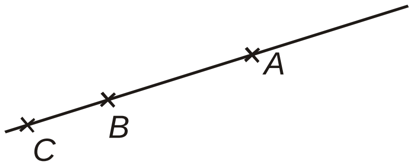
$\Rightarrow$ Bod *C* leží na přímce *AB* na polopřímce *AB* za bodem *B*.

Pokud víme, že bod *C* na přímce *AB* leží, můžeme k vyřešení příkladu využít i schématický obrázek (samozřejmě bychom mohli i zakreslit body do soustavy souřadnic, ale to je zbytečně pracné).

Body $A[1;5]$, $B[-3;3]$ (bod *B* je níže a vlevo).



Bod $C[-5;2]$ leží na přímce a je ještě nížeji a více vlevo než bod *B*.



$\Rightarrow$ Bod *C* leží na přímce *AB* na polopřímce *AB* za bodem *B*.

Př. 5: Vyřeš předchozí příklad ještě jednou, pro parametrické vyjádření využij směrový vektor, který vznikne úpravou vektoru $B-A$ na co nejmenší celočíselné souřadnice s co nejmenším počtem záporných znamének.

Parametrické vyjádření přímky *AB*:

- bod: $A[1;5]$,
- směrový vektor: $\boldsymbol{AB} = B-A = (-4;-2) \Rightarrow \boldsymbol{u} = -\frac{1}{2}(B-A) = (2;1)$.

$\Rightarrow$ Parametrické vyjádření přímky *AB*: $\begin{matrix} x = 1+2t \\ y = 5+t, t \in R \end{matrix}$.

Pokud do takto upraveného vyjádření dosadíme bod *C* nezískáme hodnotu parametru, ze které je možné ihned usoudit na jeho polohu na přímce *AB*:

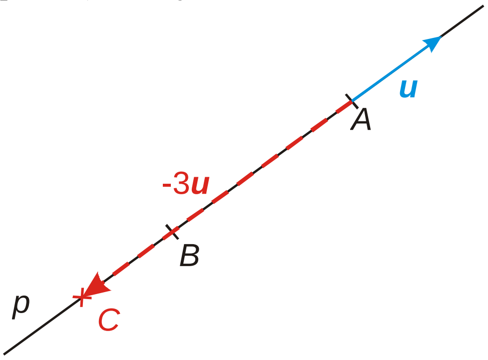
Dosadíme **bod *C***: $\begin{matrix} -5 = 1+2t \\ 2 = 5+t \end{matrix}$

Soustava dvou rovnic o dvou neznámých. Z první vypočteme *t* a dosadíme do druhé.

$-5 = 1+2t$ $\qquad$ $2 = 5+t$

$-6 = 2t \Rightarrow t = -3$ $\qquad$ $-3 = t$

$\Rightarrow$ Zdá se, že bod *C* leží na přímce *AB* na polopřímce opačné k polopřímce *AB* (což není pravda). Raději si nakreslíme schématický obrázek:



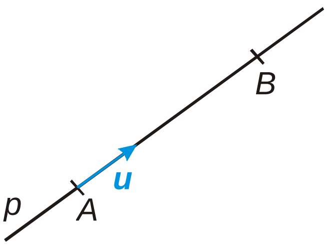
$\Rightarrow$ Bod *C* leží na přímce *AB* na polopřímce *AB* za bodem *B*.

Pokud používáme parametrické vyjádření pro zjišťování polohy bodu na přímce, musíme použít jako směrový vektor vektor $B-A$ (nebo jeho úpravu zohlednit).

Př. 6: Parametrické vyjádření přímky *p* je dáno bodem *A* a směrovým vektorem $\boldsymbol{u} = \frac{1}{3}(B-A)$. Urči hodnoty parametru *t*, které budou v parametrickém vyjádření $X = A + t\boldsymbol{u}$ náležet bodům:

a) *A*, *B*, b) na úsečce *AB*, c) polopřímce *AB*, d) polopřímce *BA*.

Nakreslíme si schématický obrázek:

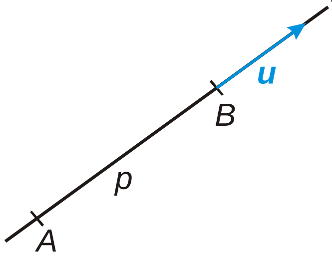


a)

Do bodu *A* se z bodu *A* dostaneme posunutím o nulový vektor $\Rightarrow \; t = 0$.
Do bodu *B* se z bodu *A* dostaneme posunutím o vektor 3***u*** $\Rightarrow \; t = 3$.
b)
Pokud chceme získat vnitřní body na úsečce *AB*, musíme se z bodu *A* posunovat o kladné násobky vektoru ***u*** menší než 3 $\Rightarrow \; t \in \langle 0;3 \rangle$.
c)
Pokud chceme získat vnitřní body na polopřímce *AB*, musíme se z bodu *A* posunovat o kladné násobky vektoru ***u*** $\Rightarrow \; t \in \langle 0;\infty)$.
d)
Bodům na polopřímce *BA* odpovídají hodnoty parametru $t \in (-\infty;3\rangle$.

Př. 7: Parametrické vyjádření přímky *p* je dáno bodem *B* a směrovým vektorem $\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}(B - A)$. Urči hodnoty parametru *t*, které budou v parametrickém vyjádření $X = B + t\boldsymbol{u}$ náležet bodům:
a) *A*, *B*, b) na úsečce *AB*, c) polopřímce *AB*, d) polopřímce *BA*.

Nakreslíme si schématický obrázek:



a)
Do bodu *A* se z bodu *B* dostaneme posunutím o vektor -2***u*** $\Rightarrow \; t = -2$.
Do bodu *B* se z bodu *B* dostaneme posunutím o nulový vektor ***u*** $\Rightarrow \; t = 0$.
b)
Pokud chceme získat vnitřní body na úsečce *AB*, musíme se z bodu *B* posunovat o záporné násobky vektoru ***u*** větší než -2 $\Rightarrow \; t \in \langle -2;0 \rangle$.
c)
Pokud chceme získat vnitřní body na polopřímce *AB*, musíme se z bodu *B* posunovat o kladné násobky vektoru ***u*** a o záporné násobky vektoru ***u*** větší než -2 $\Rightarrow \; t \in \langle -2;\infty)$.
d)
Bodům na polopřímce *BA* odpovídají hodnoty parametru $t \in (-\infty;0\rangle$.

Př. 8: Na přímce $s = \{[1+t;3-2t], t \in R\}$ leží body $K[-1;7]$ a $L[2;1]$. Najdi parametrické vyjádření úsečky *KL* pomocí daného vyjádření přímky *s*.

Musíme najít hodnoty parametrů z parametrického vyjádření, pro které získáme body *K* a *L*.
Dosadíme bod *K*: $\begin{array}{l} -1 = 1 + t \Rightarrow t = -2 \\ 7 = 3 - 2t \Rightarrow t = -2 \end{array}$, dosadíme bod *L*: $\begin{array}{l} 2 = 1 + t \Rightarrow t = 1 \\ 1 = 3 - 2t \Rightarrow t = 1 \end{array}$.
Úsečku *KL* můžeme parametricky zapsat takto: $KL = \{[1+t;3-2t], t \in \langle -2;1 \rangle\}$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad dělá studentům velké obtíže (možná právě pro svou jednoduchost), je proto lepší doporučit těm rychlejším, aby ho v případě, že je nic nenapadne, vynechali a počkali až ho budete řešit s pomalejší částí třídy. Zabaví se na následujícím příkladu, který těm pomalejším zbude na doma (v případě zájmu).

Př. 9: Petáková:
strana 106/cvičení 22 a) c)
strana 106/cvičení 23 a) c)

Shrnutí: Omezením hodnot parametru můžeme vyjádřit i části přímky (musíme však dávat pozor na to, jak jsme získali směrový vektor).