7.3.9 Nerovnice pro polorovinu

Předpoklady: 070308

Pedagogická poznámka: Příklad 1 není pro další průběh hodiny důležitý, má smysl pouze jako opakování a zaplnění času při zapisování do třídnice. Nemá smysl kvůli němu příliš ztrácet čas (dokonce přemýšlím, zda by nebylo lepší ho zcela vynechat). Stejně tak není moc účelné příliš dlouho setrvávat u vysvětlování a odvozování nerovnice poloroviny. Následující dva příklady by naopak na řadu přijít měly.

Př. 1: Urči průsečík přímek *p* a *q*. Na základě výsledku rozhodni o jejich vzájemné poloze.
$p: \begin{array}{l} x = 2+5t \\ y = 5+4t, t \in R \end{array}$, $q: 4x-5y+15=0$.

Průsečík leží na obou přímkách $\Rightarrow$ musí vyhovovat oběma vyjádřením $\Rightarrow$ řešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých.

$x = 2+5t$

$y = 5+4t$ $\Rightarrow$ Z prvních dvou rovnic dosadíme do třetí rovnice.

$4x-5y+15=0$

$4(2+5t)-5(5+4t)+15=0$

$8+20t-25-20t+15=0$

$-2=0$

Soustava nemá řešení $\Rightarrow$ přímky nemají společný bod $\Rightarrow$ přímky *p*, *q* jsou rovnoběžné.

Př. 2: Rozhodni, zda se přímka $r: x-2y-1=0$ protíná s úsečkou *PQ*, $P[-3;3]$, $Q[0;2]$. Příklad řeš v levé polovině stránky.

Úsečku umíme vyjádřit pouze parametricky.
Směrový vektor: $\boldsymbol{u}_{PQ} = Q-P = (3;-1)$, počáteční bod $P[-3;3]$ $\Rightarrow$

úsečka *PQ*: $\begin{array}{l} x = -3+3t \\ y = 3-t, t \in \langle 0;1 \rangle \end{array}$, $t \in \langle 0;1 \rangle$ (jde pouze o úsečku s počátečním bodem *P*).

Hledání průniku je stejné jako u předchozího příkladu. Musíme dát pozor, zda hodnota parametru, který případně získáme, leží v intervalu $\langle 0;1 \rangle$.

$x = -3+3t$

$y = 3-t$

$x-2y-1=0$

$-3+3t-2(3-t)-1=0$

$-3+3t-6+2t-1=0$

$5t=10$

$t=2$ $\Rightarrow$ Průsečík přímky *p* s přímkou *PQ* leží na polopřímce *PQ* za bodem *Q* $\Rightarrow$ přímka *r* se s úsečkou *PQ* neprotíná.

Pedagogická poznámka: Pokud opět narazíte na problém s vyjádřením přímky, nemá cenu situaci příliš zdržovat.

Nyní zkusíme vyřešit předchozí příklad obecně.

Př. 3: Je dána přímka $r: ax+by+c=0$ a body $P[p_1;p_2]$, $Q[q_1;q_2]$. Napiš parametrické vyjádření přímky *PQ* a urči průsečík přímky *r* s úsečkou *PQ*. Příklad řeš v pravé polovině stránky analogicky předchozímu příkladu s konkrétním zadáním.

Postupujeme stejně jako v předchozím příkladu. nyní s písmenky místo číslic.
Směrový vektor: $\boldsymbol{u}_{PQ}=Q-P=(q_1-p_1;q_2-p_2)$, počáteční bod $P[p_1;p_2]$ $\Rightarrow$

PQ: $\begin{matrix} x=p_1+t(q_1-p_1) \\ y=p_2+t(q_2-p_2) \end{matrix}$, $t\in\langle 0;1\rangle$ (jde pouze o úsečku s počátečním bodem *P*).

Řešíme soustavu rovnic.

$x=p_1+t(q_1-p_1)$

$y=p_2+t(q_2-p_2)$

$ax+by+c=0$

Z prvních dvou rovnic dosadíme do třetí.

$a[p_1+t(q_1-p_1)]+b[p_2+t(q_2-p_2)]+c=0$

Roznásobíme hranaté závorky: $ap_1+at(q_1-p_1)+bp_2+bt(q_2-p_2)+c=0$.

Rovnost $ap_1+at(q_1-p_1)+bp_2+bt(q_2-p_2)+c=0$ vypadá hrůzostrašně, přesto je v podstatě jednoduchá. Pro konkrétní zadání (jako v příkladu 2) ve výrazu vlevo zbude pouze jediná neznámá *t* (kterou můžeme stejně jako v příkladu 2 snadno vypočítat).

Prostudujeme výraz $ap_1+at(q_1-p_1)+bp_2+bt(q_2-p_2)+c$ (levá strana rovnice):

- znamená hodnotu (číslo), kterou získáme dosazením bodu na přímce *PQ* do rovnice přímky *r* (jakmile zvolíme *t*, máme konkrétní bod na přímce *PQ* a výraz pro konkrétní zadání neobsahuje žádnou proměnnou),
- jde o předpis lineární funkce proměnné *t*: $f(t): Y=At+B$, kde platí:

  $At+B=[a(q_1-p_1)+b(q_2-p_2)]t+ap_1+bp_2+c=0$.

Jaká je **hodnota funkce** $f(t): Y=At+B$ **v bodě *P***?

Pro bod *P* platí: $t=0$. Dosadíme do výrazu $t=0$:

$ap_1+a\cdot 0(q_1-p_1)+bp_2+b\cdot 0(q_2-p_2)+c=ap_1+bp_2+c$.

Platí tedy: $f(P)=f(0)=ap_1+bp_2+c$ = dosazení bodu *P* do rovnice přímky *r*.

Jaká je **hodnota funkce** $f(t): Y=At+B$ **v bodě *Q***?

Pro bod *Q* platí: $t=1$. Dosadíme do levé strany rovnice:

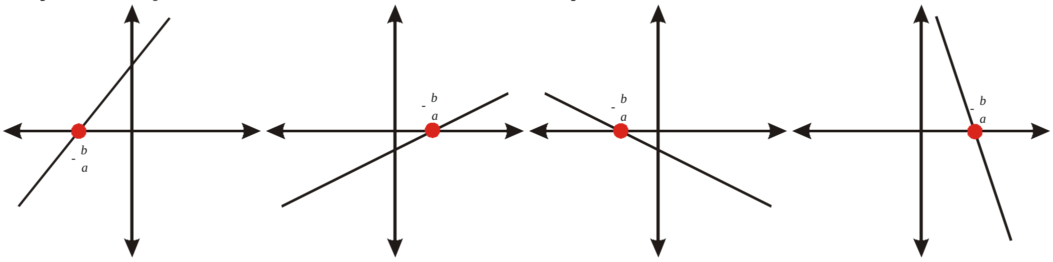
$ap_1+a\cdot 1(q_1-p_1)+bp_2+b\cdot 1(q_2-p_2)+c=$

$=ap_1+aq_1ap_1+bp_2+bq_2-bp_2+c=aq_1+bq_2+c=0$.

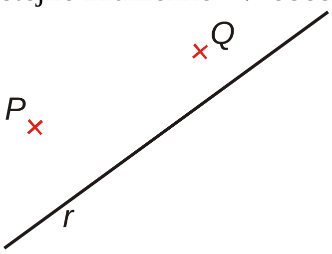
Platí tedy: $f(Q) = f(1) = aq_1 + bq_2 + c$ = dosazení bodu Q do rovnice přímky r.

Co říkají hodnoty funkce $f(t): Y = At + B$ o průsečících úsečky PQ s přímkou r?
Pokud se úsečka PQ s přímkou r protne, musí pro nějakou hodnotu parametru $t \in \langle 0;1 \rangle$ platit rovnice $ap_1 + at(q_1 - p_1) + bp_2 + bt(q_2 - p_2) + c = 0 \Rightarrow$ funkce $f(t): Y = At + B$ musí dosáhnout nulové hodnoty.

Kdy dosahuje lineární funkce nulové hodnoty?



Z grafu lineární funkce je vidět, že nekonstantní lineární funkce dosahuje nulové hodnoty pouze v bodě, kde funkce mění znaménka $\Rightarrow$ **úsečka *PQ* se protne s přímkou *r* ve vnitřním bodě právě když, mají čísla** $f(P) = f(0) = ap_1 + bp_2 + c$ **a** $f(Q) = f(1) = aq_1 + bq_2 + c$ **opačná znaménka**.
$\Rightarrow$ Dokážeme poznat, zda dva body leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou r: pokud leží ve stejné polorovině, úsečka, kterou tvoří se neprotíná s přímkou r a funkční hodnoty mají stejné znaménko $\Rightarrow$ obecná rovnice přímky nám něco říká i o bodech, které na ní neleží.



Jestliže přímka p má obecnou rovnici $ax + by + c = 0$, pak jedna polorovina s hraniční přímkou p je množina bodů $X[x; y]$, pro které platí $ax + by + c \geq 0$ a druhá polorovina je množina bodů $X[x; y]$, pro které platí $ax + by + c \leq 0$.

Dodatek: Znaménko výrazu $ax + by + c$ neříká nic o tom, zda bod leží nad nebo pod přímkou (kdybychom původní rovnici přímky vynásobily záporným číslem znaménko výrazu by se obrátilo). Jediné, co z něj zatím můžeme získat, je jeho srovnání se znaménkem jiného bodu a tedy informace, že dva body leží ve stejné polorovině.

Pedagogická poznámka: Ne všichni studenti budou schopni o hodině pochopit odvození nerovnice poloroviny. Myslím, že je zbytečné se kvůli tomu dlouho zastavovat, určitě se spokojí s obsahem rámečku. Vyřešení následujícího příkladu je pro ně důležitější.

Př. 4: Rozhodni, zda body $P[-3;3]$, $Q[0;2]$ leží v jedné polorovině ohraničené přímkou $r: x-2y-1=0$.

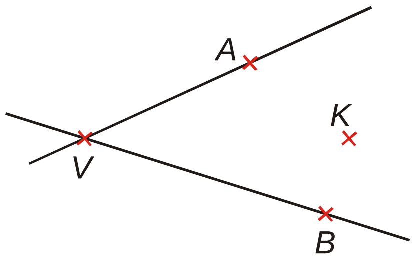
Postupujeme podle předchozích úvah:

- dosazení bodu $P[-3;3]$ do rovnice přímky *r*: $x-2y-1=-3-2\cdot 3-1=-10$,
- dosazení bodu $Q[0;2]$ do rovnice přímky *r*: $x-2y-1=0-2\cdot 2-1=-5$.

V obou případech jsme získali hodnoty se stejným znaménkem $\Rightarrow$ body *P*, *Q* leží vzhledem k přímce *r* v jedné polorovině (už víme z příkladu 2, kde jsme zjistili, že úsečka *PQ* nemá s přímkou *r* žádný průsečík).

Pedagogická poznámka: Metou této hodiny je, aby studenti pochopili odvození, ale pokud v příkladu 4 ví, co mají udělat, je to také úspěch.

Př. 5: Jsou dány body $A[1;2]$, $B[-1;-1]$, $V[-3;1]$ a $K[5;-6]$. Rozhodni výpočtem, zda bod *K* leží uvnitř konvexního úhlu *AVB*.



Z obrázku je vidět, že pokud má bod *K* ležet uvnitř konvexního úhlu *AVB* musí:

- vzhledem k hraniční přímce *VB* ležet ve stejné polorovině jako bod *A*,
- vzhledem k hraniční přímce *VA* ležet ve stejné polorovině jako bod *B*.

Hraniční přímka *VB*

Směrový vektor: $B-V=(2;-2)\Rightarrow \boldsymbol{u}_{VB}=(1;-1)$, normálový vektor: $\boldsymbol{n}_{VB}=(1;1)$ $\Rightarrow$ rovnice: $x+y+c=0$.

Dosadíme bod *B*: $(-1)+(-1)+c=0\Rightarrow c=2$.

Obecná rovnice přímky *VB*: $x+y+2=0$.

Dosadíme bod *A*: $x+y+2=1+2+2=5$.

Dosadíme bod *K*: $x+y+2=5+(-6)+2=1$.

$\Rightarrow$ Stejná znaménka $\Rightarrow$ body *A* a *K* leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou *VB*.

Hraniční přímka *VA*

Směrový vektor: $A-V=(4;1)\Rightarrow \boldsymbol{u}_{VA}=(4;1)$.

Normálový vektor: $\boldsymbol{n}_{VB}=(1;-4)$ $\Rightarrow$ rovnice: $x-4y+c=0$.

Dosadíme bod *A*: $1-4\cdot 2+c=0\Rightarrow c=7$.

Obecná rovnice přímky *VA*: $x-4y+7=0$.

Dosadíme bod *B*: $x-4y+7=(-1)-4(-1)+7=10$.

Dosadíme bod *K*: $x-4y+7=5-4(-6)+7=36$.

$\Rightarrow$ Stejná znaménka $\Rightarrow$ body *B* a *K* leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou *VA*

$\Rightarrow$ bod *K* leží uvnitř konvexního úhlu *AVB*.

Př. 6: Petáková:
strana 106/cvičení 24 a)
strana 106/cvičení 26
strana 106/cvičení 28

Shrnutí: Obecná rovnice přímky nese informaci i o bodech, které na ní neleží. Dosazením můžeme ze znamének rozhodnout, zda body leží ve stejné polorovině.