

### 7.3.9 Nerovnice pro polorovinu

**Předpoklady:** 070308

**Pedagogická poznámka:** Příklad 1 není pro další průběh hodiny důležitý, má smysl pouze jako opakování a zaplnění času při zapisování do třídnice. Nemá smysl kvůli němu příliš ztrácet čas (dokonce přemýšlím, zda by nebylo lepší ho zcela vynechat). Stejně tak není moc účelné příliš dlouho setrvávat u vysvětlování a odvozování nerovnice poloroviny. Následující dva příklady by naopak na řadu přijít měly.

**Př. 1:** Urči průsečík přímek  $p$  a  $q$ . Na základě výsledku rozhodni o jejich vzájemné poloze.

$$x = 2 + 5t$$
$$p: y = 5 + 4t, t \in \mathbb{R}, \quad q: 4x - 5y + 15 = 0.$$

Průsečík leží na obou přímkách  $\Rightarrow$  musí vyhovovat oběma vyjádřením  $\Rightarrow$  řešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých.

$$x = 2 + 5t$$

$$y = 5 + 4t \quad \Rightarrow \text{Z prvních dvou rovnic dosadíme do třetí rovnice.}$$

$$4x - 5y + 15 = 0$$

$$4(2 + 5t) - 5(5 + 4t) + 15 = 0$$

$$8 + 20t - 25 - 20t + 15 = 0$$

$$-2 = 0$$

Soustava nemá řešení  $\Rightarrow$  přímky nemají společný bod  $\Rightarrow$  přímky  $p, q$  jsou rovnoběžné.

**Př. 2:** Rozhodni, zda se přímka  $r: x - 2y - 1 = 0$  protíná s úsečkou  $PQ$ ,  $P[-3;3]$ ,  $Q[0;2]$ .

Příklad řeš v levé polovině stránky.

Úsečku umíme vyjádřit pouze parametricky.

Směrový vektor:  $\mathbf{u}_{PQ} = Q - P = (3; -1)$ , počáteční bod  $P[-3;3] \Rightarrow$

úsečka  $PQ$ :  $x = -3 + 3t$   
 $y = 3 - t, t \in \langle 0; 1 \rangle$  (jde pouze o úsečku s počátečním bodem  $P$ ).

Hledání průniku je stejné jako u předchozího příkladu. Musíme dát pozor, zda hodnota parametru, který případně získáme, leží v intervalu  $\langle 0; 1 \rangle$ .

$$x = -3 + 3t$$

$$y = 3 - t$$

$$x - 2y - 1 = 0$$

$$-3 + 3t - 2(3 - t) - 1 = 0$$

$$-3 + 3t - 6 + 2t - 1 = 0$$

$$5t = 10$$

$t = 2 \Rightarrow$  Průsečík přímky  $p$  s přímkou  $PQ$  leží na polopřímce  $PQ$  za bodem  $Q \Rightarrow$  přímka  $r$  se s úsečkou  $PQ$  neprotíná.

**Pedagogická poznámka:** Pokud opět narazíte na problém s vyjádřením přímky, nemá cenu situaci příliš zdržovat.

Nyní zkusíme vyřešit předchozí příklad obecně.

**Př. 3:** Je dána přímka  $r: ax + by + c = 0$  a body  $P[p_1; p_2]$ ,  $Q[q_1; q_2]$ . Napiš parametrické vyjádření přímky  $PQ$  a urči průsečík přímky  $r$  s úsečkou  $PQ$ . Příklad řeš v pravé polovině stránky analogicky předchozímu příkladu s konkrétním zadáním.

Postupujeme stejně jako v předchozím příkladu, nyní s písmenky místo číslic.

Směrový vektor:  $\mathbf{u}_{PQ} = Q - P = (q_1 - p_1; q_2 - p_2)$ , počáteční bod  $P[p_1; p_2] \Rightarrow$

$$PQ: \begin{cases} x = p_1 + t(q_1 - p_1) \\ y = p_2 + t(q_2 - p_2) \end{cases}, t \in \langle 0; 1 \rangle \text{ (jde pouze o úsečku s počátečním bodem } P).$$

Řešíme soustavu rovnic.

$$x = p_1 + t(q_1 - p_1)$$

$$y = p_2 + t(q_2 - p_2)$$

$$ax + by + c = 0$$

Z prvních dvou rovnic dosadíme do třetí.

$$a[p_1 + t(q_1 - p_1)] + b[p_2 + t(q_2 - p_2)] + c = 0$$

Roznásobíme hranaté závorky:  $ap_1 + at(q_1 - p_1) + bp_2 + bt(q_2 - p_2) + c = 0$ .

Rovnost  $ap_1 + at(q_1 - p_1) + bp_2 + bt(q_2 - p_2) + c = 0$  vypadá hrůzostrašně, přesto je v podstatě jednoduchá. Pro konkrétní zadání (jako v příkladu 2) ve výrazu vlevo zůstane pouze jediná neznámá  $t$  (kterou můžeme stejně jako v příkladu 2 snadno vypočítat).

Prostudujeme výraz  $ap_1 + at(q_1 - p_1) + bp_2 + bt(q_2 - p_2) + c$  (levá strana rovnice):

- znamená hodnotu (číslo), kterou získáme dosazením bodu na přímce  $PQ$  do rovnice přímky  $r$  (jakmile zvolíme  $t$ , máme konkrétní bod na přímce  $PQ$  a výraz pro konkrétní zadání neobsahuje žádnou proměnnou),
- jde o předpis lineární funkce proměnné  $t$ :  $f(t): Y = At + B$ , kde platí:

$$At + B = [a(q_1 - p_1) + b(q_2 - p_2)]t + ap_1 + bp_2 + c = 0.$$

Jaká je **hodnota funkce**  $f(t): Y = At + B$  **v bodě**  $P$ ?

Pro bod  $P$  platí:  $t = 0$ . Dosadíme do výrazu  $t = 0$ :

$$ap_1 + a \cdot 0(q_1 - p_1) + bp_2 + b \cdot 0(q_2 - p_2) + c = ap_1 + bp_2 + c.$$

Platí tedy:  $f(P) = f(0) = ap_1 + bp_2 + c =$  dosazení bodu  $P$  do rovnice přímky  $r$ .

Jaká je **hodnota funkce**  $f(t): Y = At + B$  **v bodě**  $Q$ ?

Pro bod  $Q$  platí:  $t = 1$ . Dosadíme do levé strany rovnice:

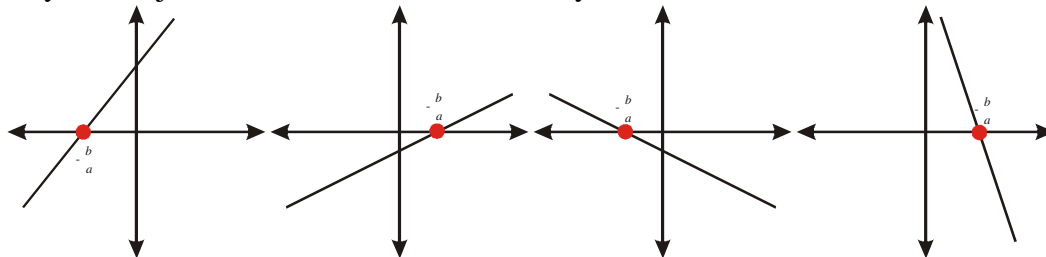
$$\begin{aligned} ap_1 + a \cdot 1(q_1 - p_1) + bp_2 + b \cdot 1(q_2 - p_2) + c &= \\ = ap_1 + aq_1 - ap_1 + bp_2 + bq_2 - bp_2 + c &= aq_1 + bq_2 + c = 0 \end{aligned}$$

Platí tedy:  $f(Q) = f(1) = aq_1 + bq_2 + c =$  dosazení bodu  $Q$  do rovnice přímky  $r$ .

Co říkají hodnoty funkce  $f(t): Y = At + B$  o průsečících úsečky  $PQ$  s přímkou  $r$ ?

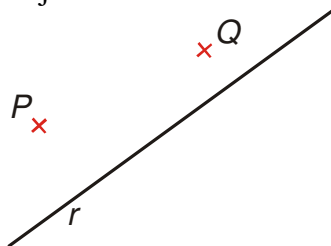
Pokud se úsečka  $PQ$  s přímkou  $r$  protne, musí pro nějakou hodnotu parametru  $t \in \langle 0; 1 \rangle$  platit rovnice  $ap_1 + at(q_1 - p_1) + bp_2 + bt(q_2 - p_2) + c = 0 \Rightarrow$  funkce  $f(t): Y = At + B$  musí dosáhnout nulové hodnoty.

Kdy dosahuje lineární funkce nulové hodnoty?



Z grafu lineární funkce je vidět, že nekonstantní lineární funkce dosahuje nulové hodnoty pouze v bodě, kde funkce mění znaménka  $\Rightarrow$  **úsečka  $PQ$  se protne s přímkou  $r$  ve vnitřním bodě, právě když mají čísla  $f(P) = f(0) = ap_1 + bp_2 + c$  a  $f(Q) = f(1) = aq_1 + bq_2 + c$  opačná znaménka.**

$\Rightarrow$  Dokážeme poznat, zda dva body leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou  $r$ : pokud leží ve stejné polorovině, úsečka, kterou tvoří, se neprotíná s přímkou  $r$  a funkční hodnoty mají stejné znaménko  $\Rightarrow$  obecná rovnice přímky nám něco říká i o bodech, které na ní neleží.



Jestliže přímka  $p$  má obecnou rovnici  $ax + by + c = 0$ , pak jedna polorovina s hraniční přímkou  $p$  je množina bodů  $X[x; y]$ , pro které platí  $ax + by + c \geq 0$  a druhá polorovina je množina bodů  $X[x; y]$ , pro které platí  $ax + by + c \leq 0$ .

**Dodatek:** Znaménko výrazu  $ax + by + c$  neříká nic o tom, zda bod leží nad nebo pod přímkou (kdybychom původní rovnici přímky vynásobili záporným číslem znaménko výrazu by se obrátilo). Jediné, co z něj zatím můžeme získat, je jeho srovnání se znaménkem jiného bodu a tedy informace, že dva body leží ve stejné polorovině.

**Pedagogická poznámka:** Ne všichni studenti budou schopni o hodině pochopit odvození nerovnice poloroviny. Myslím, že je zbytečné se kvůli tomu dlouho zastavovat, určitě se spokojí s obsahem rámečku. Vyřešení následujícího příkladu je pro ně důležitější.

**Př. 4:** Rozhodni, zda body  $P[-3;3]$ ,  $Q[0;2]$  leží v jedné polorovině ohraničené přímkou  $r: x-2y-1=0$ .

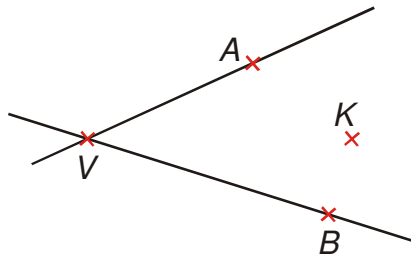
Postupujeme podle předchozích úvah:

- dosazení bodu  $P[-3;3]$  do rovnice přímky  $r: x-2y-1=-3-2\cdot 3-1=-10$ ,
- dosazení bodu  $Q[0;2]$  do rovnice přímky  $r: x-2y-1=0-2\cdot 2-1=-5$ .

V obou případech jsme získali hodnoty se stejným znaménkem  $\Rightarrow$  body  $P, Q$  leží vzhledem k přímce  $r$  v jedné polorovině (už víme z příkladu 2, kde jsme zjistili, že úsečka  $PQ$  nemá s přímkou  $r$  žádný průsečík).

**Pedagogická poznámka:** Metou této hodiny je, aby studenti pochopili odvození, ale pokud v příkladu 4 vědí, co mají udělat, je to také úspěch.

**Př. 5:** Jsou dány body  $A[1;2]$ ,  $B[-1;-1]$ ,  $V[-3;1]$  a  $K[5;-6]$ . Rozhodni výpočtem, zda bod  $K$  leží uvnitř konvexního úhlu  $AVB$ .



Z obrázku je vidět, že pokud má bod  $K$  ležet uvnitř konvexního úhlu  $AVB$  musí:

- vzhledem k hraniční přímce  $VB$  ležet ve stejné polorovině jako bod  $A$ ,
- vzhledem k hraniční přímce  $VA$  ležet ve stejné polorovině jako bod  $B$ .

**Hraniční přímka  $VB$**

Směrový vektor:  $B-V=(2;-2) \Rightarrow \mathbf{u}_{VB}=(1;-1)$ , normálový vektor:  $\mathbf{n}_{VB}=(1;1) \Rightarrow$  rovnice:  $x+y+c=0$ .

Dosadíme bod  $B$ :  $(-1)+(-1)+c=0 \Rightarrow c=2$ .

Obecná rovnice přímky  $VB$ :  $x+y+2=0$ .

Dosadíme bod  $A$ :  $x+y+2=1+2+2=5$ .

Dosadíme bod  $K$ :  $x+y+2=5+(-6)+2=1$ .

$\Rightarrow$  Stejná znaménka  $\Rightarrow$  body  $A$  a  $K$  leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou  $VB$ .

**Hraniční přímka  $VA$**

Směrový vektor:  $A-V=(4;1) \Rightarrow \mathbf{u}_{VA}=(4;1)$ .

Normálový vektor:  $\mathbf{n}_{VA}=(1;-4) \Rightarrow$  rovnice:  $x-4y+c=0$ .

Dosadíme bod  $A$ :  $1-4\cdot 2+c=0 \Rightarrow c=7$ .

Obecná rovnice přímky  $VA$ :  $x-4y+7=0$ .

Dosadíme bod  $B$ :  $x-4y+7=(-1)-4(-1)+7=10$ .

Dosadíme bod  $K$ :  $x-4y+7=5-4(-6)+7=36$ .

$\Rightarrow$  Stejná znaménka  $\Rightarrow$  body  $B$  a  $K$  leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou  $VA$

$\Rightarrow$  bod  $K$  leží uvnitř konvexního úhlu  $AVB$ .

**Př. 6:** Petáková:  
strana 106/cvičení 24 a)  
strana 106/cvičení 26  
strana 106/cvičení 28

**Shrnutí:** Obecná rovnice přímky nese informaci i o bodech, které na ní neleží. Dosazením můžeme ze znamének rozhodnout, zda body leží ve stejné polorovině.