7.3.10 Směrnicový tvar rovnice přímky

Předpoklady: 070307

Pedagogická poznámka: Hodina má netypickou strukturu. Celou úvodní část tvoří klasický výklad, který nechám napsaný na tabuli, poté promítnu příklady a žáci se snaží, jich co nejvíce vyřešit. Klasický postup uplatňovaný v této učebnici se v této hodině neosvědčil, protože se výklad se samostatnou prací střídal příliš rychle. Oslnivé zlepšení se rozhodně nedostavilo, ale přesto považuji změnu za užitečnou, použitý postup se totiž více blíží tradičnímu stylu na vysokých školách.
Na v rámci učebnice netradiční postup je nutné žáky upozornit předem na začátku hodiny s tím, že důležité věci zůstanou na tabuli a není proto nutné zběsile opisovat všechno, co se na ní objeví.

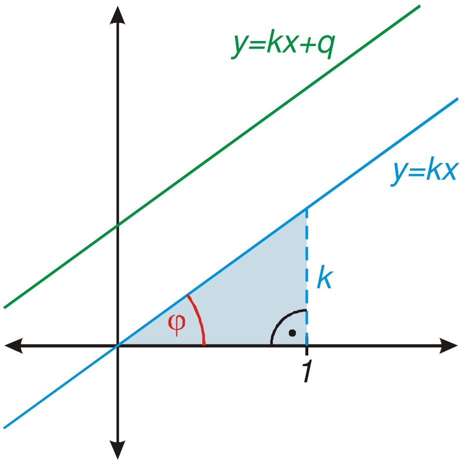
Vrátíme se k obecné rovnici přímky:
Obecná rovnice ve tvaru $ax+by+c=0$ není jednoznačná. Obsahuje tři parametry, rovnice, které jsou navzájem svými násobky, popisují stejné přímky.
Jak popsat přímku jednoznačně?
Nápad: Zápis lineární funkce $y=kx+q$ je jednoznačný, různé předpisy znamenají různé funkce (a tedy různé přímky).

Můžeme na tento tvar převést každou obecnou rovnici přímky?
$ax+by+c=0$
$by=-ax-c \quad /:b$ (vydělit můžeme jen, když platí $b\neq 0$)
$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ (tohle jsme chtěli)

Pro které přímky, tento tvar nezískáme?
Když $b=0$ $\Rightarrow$ tedy přímky $ax+0y+c=0$,
$ax=-c$ - přímky rovnoběžné s osou *y*. O těch jsme u lineárních funkcí nemluvili, nejde o grafy funkcí.

Rovnici každé přímky, která není rovnoběžná s osou *y*, můžeme napsat ve tvaru $y=kx+q$. Tato rovnice se nazývá směrnicový tvar rovnice přímky. Číslo *k* se nazývá směrnice přímky.

Význam koeficientů:
- *q*: posunutí po ose *y*,
- *k*: udává směr přímky, jde o $\mathrm{tg}\,\varphi$, kde φ je úhel, který svírá přímka s kladnou poloosou *x*.



Z pravoúhlého trojúhelníku je vidět, že platí: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{k}{1} = k$

Zkusíme si ve směrnicovém tvaru rovnici přímky se směrnicí *k*, která prochází bodem $A[a_1;a_2]$.

Směrnicový tvar: $y = kx + q$.

Dosadíme bod $A[a_1;a_2]$ do rovnice a dopočítáme *q*: $a_2 = ka_1 + q$.

$q = a_2 - ka_1$

Dosadíme do rovnice: $y = kx + q = kx + a_2 - ka_1$.

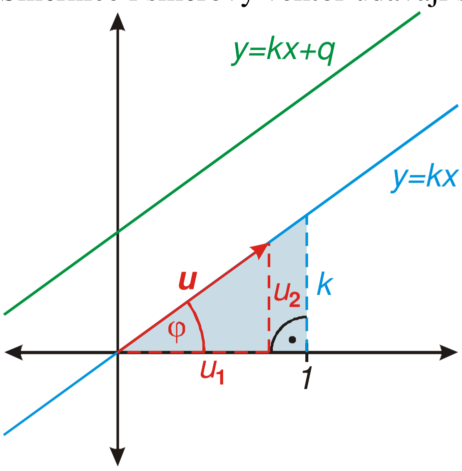
Rovnici $y = kx + a_2 - ka_1$ častěji píšeme ve tvaru: $y - a_2 = k(x - a_1)$ $\Rightarrow$ největší výhoda směrnicového tvaru - snadno dokážeme zapsat přímku, která prochází bodem $A[a_1;a_2]$.

Přímku, která má směrnici *k* a prochází bodem $A[a_1;a_2]$ zapíšeme rovnicí $(y - a_2) = k(x - a_1)$.

Jak zapsat všechny přímky procházející daným bodem (často používané později u kuželoseček)?

- Mají různý směr $\Rightarrow$ použijeme $k \in R$.
- Prochází bodem $A[a_1;a_2]$ $\Rightarrow$ použijeme tvar $(y - a_2) = k(x - a_1)$.
- **POZOR!!!** Přímku rovnoběžnou s osou *y* nemůžeme napsat ve směrnicovém tvaru $\Rightarrow$ musíme ji napsat zvlášť: $x = a_1$.

Směrnice i směrový vektor udávají směr přímky $\Rightarrow$ musí spolu souviset. Jak?



Z obrázku je vidět, že platí $\operatorname{tg}\varphi = \frac{k}{1} = k = \frac{u_2}{u_1}$

Pedagogická poznámka: Ve škole kreslím pouze funkci $y = kx + q$ a ptám se žáků, jak mám do obrázky se souřadnicemi směrový vektor nakreslit (jak si vybrat z těch nekonečně mnoho možností tu nejvýhodnější).

Jaký je vztah mezi směrnicemi navzájem kolmých přímek?
Napíšeme si dvě kolmice ve směrnicovém tvaru: $p: y = kx + q$, $q: y = k'x + q'$.
Přepíšeme do obecného tvaru: $p: kx - y + q = 0$, $q: k'x - y + q' = 0$.
Kolmost můžeme určit z normálových vektorů: $\boldsymbol{n}_p = (k;-1)$, $\boldsymbol{n}_q = (k';-1)$.
Dva vektory jsou kolmé, když je jejich skalární součin roven nule.

$$\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{n}_q = (k;-1)(k';-1) = k \cdot k' + (-1)(-1) = 0$$
$$k \cdot k' + 1 = 0$$
$$k \cdot k' = -1$$

$k' = -\frac{1}{k}$ $\Rightarrow$ Směrnice dvou kolmic jsou čísla s opačným znaménkem a převrácenou absolutní hodnotou.

Př. 1: Je dána přímka $6x + 3y - 4 = 0$. Najdi směrnicový tvar rovnice této přímky, urči odchylku této přímky od kladné poloosy *x*.

$$6x + 3y - 4 = 0$$
$$3y = -6x + 4$$

$y = -2x + \frac{4}{3}$ $\Rightarrow$ směrnice přímky $k = -2$.

$\operatorname{tg}\varphi = -2 \Rightarrow \varphi = 116°34'$

Př. 2: Napiš obecnou rovnici a směrnicový tvar rovnice přímky se směrnicí $k = 2$, která prochází bodem $A[1;-1]$.

Dosadíme do směrnicového tvaru $y = kx + q$:

$y = 2x + q$ teď dosadíme bod $A[1;-1]$

$$-1 = 2 \cdot 1 + q$$
$$q = -3$$

Směrnicový tvar: $y = 2x - 3$.
Obecná rovnice: $2x - y - 3 = 0$.

Př. 3: Ověř dosazením, že bod $A[a_1;a_2]$ vyhovuje rovnici $(y - a_2) = k(x - a_1)$ bez ohledu na směrnici *k*.

$(y - a_2) = k(x - a_1)$ (dosadíme bod $A[a_1;a_2]$)

$(a_2 - a_2) = k(a_1 - a_1)$

$0 = k \cdot 0$ (vyjde bez ohledu na *k*)

Dodatek: Zapisování rovnic ve tvaru, který využívá nulující se závorky, je v matematice poměrně časté.

Pedagogická poznámka: Příklad 3 opět ověřuje správné chápání rovnic v analytické geometrii (rozdíl mezi koeficienty *a*, *b*, *c* (které se u konkrétních přímek liší a které určují o kterou přímku jde) a neznámými *x*, *y* (které slouží jako „připravená místa" pro dosazení souřadnic bodů, jejichž vztah k přímce chceme zjišťovat).

Př. 4: Zapiš všechny přímky, které procházejí bodem $[3;1]$.

Použijeme směrnicový tvar: $y-a_2=k(x-a_1)$ $\quad k\in R$.

Dosadíme bod $[3;1]$: $y-1=k(x-3)$, $k\in R$.

Ještě rovnoběžka s osou *y*: $x=3$.

Př. 5: Využij vztah mezi směrnicí a směrovým vektorem k zapsání směrnicového tvaru rovnice přímky *AB*, $A[1;3]$, $B[-1;4]$.

Nejdříve určíme směrnici pomocí směrového vektoru, pak dosadíme do tvaru pro přímku procházející bodem.

Směrový vektor: $B-A=(-2;1)\Rightarrow \boldsymbol{u}=(-2;1)$ $\quad\Rightarrow k=\frac{u_2}{u_1}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$.

Přímka procházející bodem: $(y-a_2)=k(x-a_1)$.

Dosadíme bod $A[1;3]$ a směrnici $k=-\frac{1}{2}$: $y-3=-\frac{1}{2}(x-1)$

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+3$

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

Dodatek: Získaná rovnice samozřejmě nezávisí na tom, který bod použijeme pro dosazení:

Dosadíme bod $B[-1;4]$: $y-4=-\frac{1}{2}(x-(-1))$,

$y-4=-\frac{1}{2}(x+1)$ $\qquad y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+4$

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$ $\Rightarrow$ stejný výsledek.

Př. 6: Využij vztah mezi směrnicemi navzájem kolmých přímek pro nalezení směrnicového tvar rovnice přímky, která prochází bodem $A[2;1]$ a je kolmá na přímku $y=2x+1$.

Směrnice původní přímky: $k=2$ $\Rightarrow$ směrnice kolmice: $k'=-\frac{1}{k}=-\frac{1}{2}$.

Do rovnice $y=-\frac{1}{2}x+q$ dosadíme bod $A[2;1]$: $1=-\frac{1}{2}\cdot 2+q$ $\Rightarrow$ $q=2$.

Hledaná přímka má rovnici: $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

Př. 7: Petáková:
strana 105/cvičení 3

Shrnutí: Směrnicový tvar (předpis lineární funkce) umožňuje snadno zapsat přímku procházející bodem.