7.3.10 Směrnicový tvar rovnice přímky

Předpoklady: 070307

Pedagogická poznámka: Hodina má netypickou strukturu. Celou úvodní část tvoří klasický výklad, který nechám napsaný na tabuli, poté promítnu příklady a žáci se snaží, jich co nejvíce vyřešit. Klasický postup uplatňovaný v této učebnici se v této hodině neosvědčil, protože se výklad se samostatnou prací střídal příliš rychle.

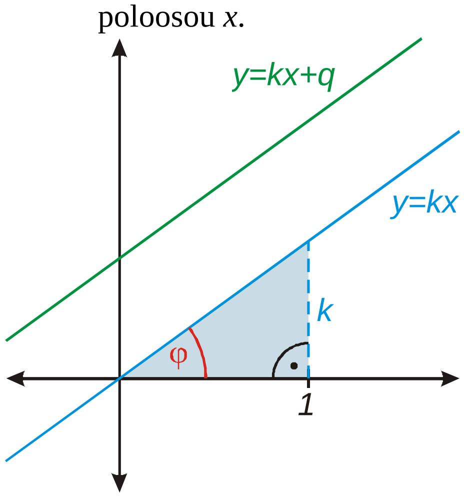
Vrátíme se k obecné rovnici přímky:
Obecná rovnice ve tvaru $ax+by+c=0$ není jednoznačná. Obsahuje tři parametry, rovnice, které jsou navzájem svými násobky, popisují stejné přímky.
Jak popsat přímku jednoznačně?
Nápad: Zápis lineární funkce $y=kx+q$ je jednoznačný, různé předpisy znamenají různé funkce (a tedy různé přímky).

Můžeme na tento tvar převést každou obecnou rovnici přímky?
$ax+by+c=0$
$by=-ax-c \quad /:b$ (vydělit můžeme jen, když platí $b\neq 0$)
$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ (tohle jsme chtěli)

Pro které přímky, tento tvar nezískáme?
Když $b=0 \Rightarrow$ tedy přímky $ax+0y+c=0$,
$ax=-c$ - přímky rovnoběžné s osou *y*. O těch jsme u lineárních funkcí nemluvili, nejde o grafy funkcí.

Rovnici každé přímky, která není rovnoběžná s osou *y*, můžeme napsat ve tvaru $y=kx+q$. Tato rovnice se nazývá směrnicový tvar rovnice přímky. Číslo *k* se nazývá směrnice přímky.

Význam koeficientů:
- *q*: posunutí po ose *y*,
- *k*: udává směr přímky, jde o $\mathrm{tg}\,\varphi$, kde φ je úhel, který svírá přímka s kladnou poloosou *x*.



Z pravoúhlého trojúhelníku je vidět, že platí: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{k}{1} = k$

Zkusíme si ve směrnicovém tvaru rovnici přímky se směrnicí *k*, která prochází bodem $A[a_1;a_2]$.

Směrnicový tvar: $y = kx + q$.

Dosadíme bod $A[a_1;a_2]$ do rovnice a dopočítáme *q*: $a_2 = ka_1 + q$.

$q = a_2 - ka_1$

Dosadíme do rovnice: $y = kx + q = kx + a_2 - ka_1$.

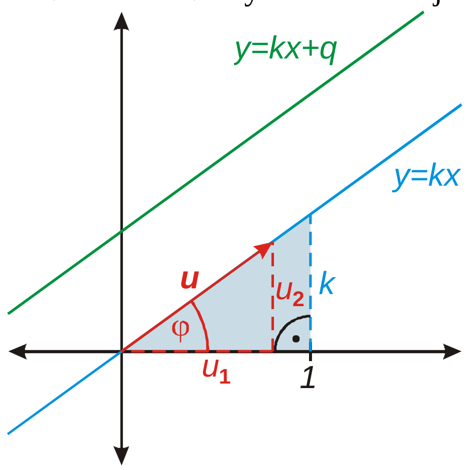
Rovnici $y = kx + a_2 - ka_1$ častěji píšeme ve tvaru: $y - a_2 = k(x - a_1)$ $\Rightarrow$ největší výhoda směrnicového tvaru - snadno dokážeme zapsat přímku, která prochází bodem $A[a_1;a_2]$.

> Přímku, která má směrnici *k* a prochází bodem $A[a_1;a_2]$ zapíšeme rovnicí $(y - a_2) = k(x - a_1)$.

Jak zapsat všechny přímky procházející daným bodem (často používané později u kuželoseček)?

- Mají různý směr $\Rightarrow$ použijeme $k \in R$.
- Prochází bodem $A[a_1;a_2]$ $\Rightarrow$ použijeme tvar $(y - a_2) = k(x - a_1)$.
- **POZOR!!!** Přímku rovnoběžnou s osou *y* nemůžeme napsat ve směrnicovém tvaru $\Rightarrow$ musíme ji napsat zvlášť: $x = a_1$.

Směrnice i směrový vektor udávají směr přímky $\Rightarrow$ musí spolu souviset. Jak?



Z obrázku je vidět, že platí $\operatorname{tg}\varphi = \frac{k}{1} = k = \frac{u_2}{u_1}$

Pedagogická poznámka: Ve škole kreslím pouze funkci $y = kx + q$ a ptám se žáků, jak mám do obrázky se souřadnicemi směrový vektor nakreslit (jak si vybrat z těch nekonečně mnoho možností tu nejvýhodnější).

Jaký je vztah mezi směrnicemi navzájem kolmých přímek?

Napíšeme si dvě kolmice ve směrnicovém tvaru: $p: y = kx + q$, $q: y = k'x + q'$.

Přepíšeme do obecného tvaru: $p: kx - y + q = 0$, $q: k'x - y + q' = 0$.

Kolmost můžeme určit z normálových vektorů: $\boldsymbol{n}_p = (k;-1)$, $\boldsymbol{n}_q = (k';-1)$.

Dva vektory jsou kolmé, když je jejich skalární součin roven nule.

$\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{n}_q = (k;-1)(k';-1) = k \cdot k' + (-1)(-1) = 0$
$k \cdot k' + 1 = 0$
$k \cdot k' = -1$
$k' = -\frac{1}{k}$ $\Rightarrow$ Směrnice dvou kolmic jsou čísla s opačným znaménkem a převrácenou absolutní hodnotou.

Př. 1: Je dána přímka $6x + 3y - 4 = 0$. Najdi směrnicový tvar rovnice této přímky, urči odchylku této přímky od kladné poloosy *x*.

$6x + 3y - 4 = 0$
$3y = -6x + 4$
$y = -2x + \frac{4}{3}$ $\Rightarrow$ směrnice přímky $k = -2$.
$\operatorname{tg} \varphi = -2 \Rightarrow \varphi = 116°34'$

Př. 2: Napiš obecnou rovnici a směrnicový tvar rovnice přímky se směrnicí $k = 2$, která prochází bodem $A[1;-1]$.

Dosadíme do směrnicového tvaru $y = kx + q$:
$y = 2x + q$ teď dosadíme bod $A[1;-1]$
$-1 = 2 \cdot 1 + q$
$q = -3$
Směrnicový tvar: $y = 2x - 3$.
Obecná rovnice: $2x - y - 3 = 0$.

Př. 3: Ověř dosazením, že bod $A[a_1;a_2]$ vyhovuje rovnici $(y - a_2) = k(x - a_1)$ bez ohledu na směrnici *k*.

$(y - a_2) = k(x - a_1)$ (dosadíme bod $A[a_1;a_2]$)
$(a_2 - a_2) = k(a_1 - a_1)$
$0 = k \cdot 0$ (vyjde bez ohledu na *k*)

Dodatek: Zapisování rovnic ve tvaru, který využívá nulující se závorky, je v matematice poměrně časté.

Pedagogická poznámka: Příklad 3 opět ověřuje správné chápání rovnic v analytické geometrii (rozdíl mezi koeficienty *a*, *b*, *c* (které se u konkrétních přímek liší a které určují o kterou přímku jde) a neznámými *x*, *y* (které slouží jako „připravená místa“ pro dosazení souřadnic bodů, jejichž vztah k přímce chceme zjišťovat).

Př. 4: Zapiš všechny přímky, které procházejí bodem $[3;1]$.

Použijeme směrnicový tvar: $y - a_2 = k(x - a_1)$ $k \in R$.

Dosadíme bod $[3;1]$: $y-1=k(x-3)$, $k\in R$.
Ještě rovnoběžka s osou *y*: $x=3$.

Př. 5: Využij vztah mezi směrnicí a směrovým vektorem k zapsání směrnicového tvaru rovnice přímky *AB*, $A[1;3]$, $B[-1;4]$.

Nejdříve určíme směrnici pomocí směrového vektoru, pak dosadíme do tvaru pro přímku procházející bodem.

Směrový vektor: $B-A=(-2;1)\Rightarrow \boldsymbol{u}=(-2;1) \quad \Rightarrow k=\frac{u_2}{u_1}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$.

Přímka procházející bodem: $(y-a_2)=k(x-a_1)$.

Dosadíme bod $A[1;3]$ a směrnici $k=-\frac{1}{2}$: $y-3=-\frac{1}{2}(x-1)$

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+3$$
$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$

Dodatek: Získaná rovnice samozřejmě nezávisí na tom, který bod použijeme pro dosazení:
Dosadíme bod $B[-1;4]$: $y-4=-\frac{1}{2}(x-(-1))$,

$y-4=-\frac{1}{2}(x+1)$ $\qquad$ $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+4$

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$ $\Rightarrow$ stejný výsledek.

Př. 6: Využij vztah mezi směrnicemi navzájem kolmých přímek pro nalezení směrnicového tvar rovnice přímky, která prochází bodem $A[2;1]$ a je kolmá na přímku $y=2x+1$.

Směrnice původní přímky: $k=2 \Rightarrow$ směrnice kolmice: $k'=-\frac{1}{k}=-\frac{1}{2}$.

Do rovnice $y=-\frac{1}{2}x+q$ dosadíme bod $A[2;1]$: $1=-\frac{1}{2}\cdot 2+q \Rightarrow q=2$.

Hledaná přímka má rovnici: $y=-\frac{1}{2}x+2$.

Př. 7: Petáková:
strana 105/cvičení 3

Shrnutí: Směrnicový tvar (předpis lineární funkce) umožňuje snadno zapsat přímku procházející bodem.