7.3.11 Úsekový tvar rovnice přímky

Předpoklady: 070307

Př. 1: Jakou podmínku splňují body ležící na ose x? Pomocí dvou bodů na ose x sestav parametrickou a obecnou rovnici této přímky.

Body na ose x například: $[2;0]$, $[15;0]$, $[-3;0]$ $\Rightarrow$ společná vlastnost: y-ová souřadnice je nulová (jde o body $[x;0]$).

Parametrické vyjádření: body $[1;0]$, $[2;0]$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{u}=(1;0)$, bod $[0,0]$

$$\begin{aligned} x &= 0+t \\ y &= 0, t \in R \end{aligned}$$

(jasné, x-ová souřadnice bodů na ose x může být cokoliv, y-ová je nulová)

Obecná rovnice: $\boldsymbol{u}=(1;0)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n}=(0;1)$ $\Rightarrow$ rovnice $0x+y+c=0$

Dosadíme bod $[0;0]$: $0+c=0$ $\Rightarrow$ $c=0$

Rovnice osy x: $y=0$ (jasné jde o vyjádření podmínky ze začátku příkladu pomocí rovnice)

Všechny tři způsoby, jak popsat osu x, říkají to samé.

- Jde o body $[x;0]$ $\Rightarrow$ x-ová souřadnice může být libovolná, y-ová souřadnice musí být nulová $\Rightarrow$ tyto body můžeme zapsat podmínkou $y=0$ (obecná rovnice ve třetím bodu).
- Parametrické vyjádření $\begin{aligned} x &= 0+t \\ y &= 0, t \in R \end{aligned}$ $\Rightarrow$ x-ová souřadnice může být libovolná (za t můžeme dosadit cokoliv), y-ová souřadnice musí být nulová.
- Obecná rovnice $y=0$ $\Rightarrow$ x-ová souřadnice může být libovolná (není pro ni stanovena žádná podmínky), y-ová souřadnice musí být nulová.

Pedagogická poznámka: Příklad je zařazen ze tří důvodů (rozhodně není zbytečný):
kvůli snadnějšímu řešení příkladu 3,
zopakování základních druhů rovnic přímky (postupy, které obsahují hodně nul jsou pro žáky obecně méně příjemné, mají pocit, že jde o něco zvláštního),
ukázkou skutečnosti, že třemi různými způsoby říkáme prakticky to samé (pokud jsme schopni rovnice interpretovat).

Př. 2: Jakou podmínku splňují body ležící na ose y? Sestav parametrickou a obecnou rovnici osy y. Využij řešení předchozího příkladu.

Podle předchozího příkladu můžeme psát rovnou:

- jde o body $[0;y]$ (x-ová souřadnice je nulová, y-ová libovolná),
- parametrické vyjádření $\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0+t, t \in R \end{aligned}$,
- obecná rovnice $x=0$.

Dodatek: Při řešení předchozího příkladu bychom samozřejmě mohli postupovat stejně jako v příkladu 1, ale nedává to moc smysl a nikdo to nedělá (a asi by ani neměl).

Body na ose *y* například: $[0;1]$, $[0;1532]$, $[0;-562] \Rightarrow$ společná vlastnost: *x*-ová souřadnice je nulová (jde o body $[0;y]$).

Parametrické vyjádření: Body $[0;1]$, $[0;2]$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{u}=(0;1)$, bod $[0,0]$

$x=0$
$y=0+t, t\in R$ (jasné, *y*-ová souřadnice bodů na ose *y* může být cokoliv, *x*-ová je nulová)

Obecná rovnice: $\boldsymbol{u}=(0;1) \Rightarrow \boldsymbol{n}=(1;0) \Rightarrow$ rovnice $x+0y+c=0$

Dosadíme bod $[0;0]$: $0+c=0 \Rightarrow c=0$.

Rovnice osy *y*: $x=0$ (jasné jde o vyjádření podmínky ze začátku příkladu pomocí rovnice).

Př. 3: Je dána přímka $p: 3x+4y-12=0$. Urči průsečíky přímky *p* s osami *x* a *y*.

Průsečík s osou *x* $\Rightarrow$ nulová *y*-ová souřadnice $\Rightarrow A[a_x;0]$.

Dosadíme bod $A[a_x;0]$ do rovnice přímky *p*: $3a_x+4\cdot 0-12=0$.

$3a_x=12$

$a_x=4 \Rightarrow$ přímka *p* se protíná s osou *x* v bodě $A[4;0]$.

Průsečík s osou *y* $\Rightarrow$ nulová *x*-ová souřadnice $\Rightarrow B[0;b_y]$.

Dosadíme bod $B[0;b_y]$ do rovnice přímky *p*: $3\cdot 0+4\cdot b_y-12=0$.

$4b_y=12$

$b_y=3 \Rightarrow$ přímka *p* se protíná s osou *y* v bodě $B[0;3]$.

Dodatek: Řešení předchozího příkladu si můžeme zdůvodnit i jinak. Průsečík přímky *p* s osou *x* je průsečík přímek $3x+4y-12=0$ a $y=0$ (obecná rovnice osy *x*) $\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic: $\begin{matrix} 3x+4y-12=0 \\ y=0 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ dosadíme z druhé rovnice do první:

$3x+4\cdot 0-12=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow A[4;0]$. Podobně průsečík s osou *y*.

Jde samozřejmě o to samé, jako v řešení příkladu, jen trochu jinak okomentované.

Postřeh: Pro přímku $p: 3x+4y-12=0$ jsme získali průsečíky $A[4;0]$ a $B[0;3]$. Nenulové souřadnice průsečíků vystupují i v rovnici přímky (ale u opačných souřadnic). Není to náznak nějakého pravidla?

Zkusíme si upravit rovnici přímky.

$3x+4y-12=0$

$3x+4y=12 \quad /:12$

$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$

Neznámé *x* a *y* jsou ve zlomcích, jejichž jmenovatelé jsou souřadnicemi průsečíků se souřadnými osami. Zkusíme průsečíky do tohoto tvaru rovnice dosadit, abychom zjistili, jak pro ně rovnice vychází:

- $A[4;0]$: $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=\frac{4}{4}+\frac{0}{3}=1$,
- $B[0;3]$: $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=\frac{0}{4}+\frac{3}{3}=1$.

Nejde o náhodu, pokud obecnou rovnici přímky upravíme tak, aby na pravé straně byla jednička, proběhne vynulování levé strany dosazením průsečíku vždy $\Rightarrow$ získali jsme **úsekový tvar rovnice přímky**.

Dodatek: Žáky, kteří vidí dosazení ihned, můžete nechat samostatně napsat modrý rámeček.

Další ukázka toho, jak si napsat rovnici ve tvaru, ze kterého můžeme něco poznat.

Jsou dány body $P[p;0]$ a $Q[0;q]$, kde $p \neq 0$ a $q \neq 0$ (tedy body *P* a *Q* jsou body na souřadnicových osách různé od počátku). Přímka *PQ* má rovnici $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$.

Je-li přímka napsaná ve tvaru $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$, kde $p \neq 0$ a $q \neq 0$, protíná se souřadnými osami v bodech $P[p;0]$ a $Q[0;q]$.

Rovnice $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ se nazývá úsekový tvar přímky.

Př. 4: Dosazením ověř, zda platí, že přímka napsaná ve tvaru $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$, kde $p \neq 0$ a $q \neq 0$ se protíná se souřadnými osami v bodech $P[p;0]$ a $Q[0;q]$.

Dosadíme $P[p;0]$:

$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$

$\frac{p}{p}+\frac{0}{q}=1$

$1=1$

Dosadíme $Q[0;q]$:

$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$

$\frac{0}{p}+\frac{q}{q}=1$

$1=1$

Př. 5: Zadané obecné rovnice převeď do úsekového tvaru a z něj urči průsečíky se souřadnými osami.

a) $2x-3y-6=0$ b) $8x+y-4=0$

a) $2x-3y-6=0 \quad /+6$

$2x-3y=6 \quad /:6$

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$$ $\Rightarrow$ přímka se protíná se souřadnými osami v bodech $X[3; 0]$ a $Y[0; -2]$.

b) $8x + y - 4 = 0 \quad / +4$

$8x + y = 4 \quad / : 4$

$$2x + \frac{y}{4} = 1$$

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{4} = 1$$ $\Rightarrow$ přímka se protíná se souřadnými osami v bodech $X\left[\frac{1}{2}; 0\right]$ a $Y[0; 4]$.

Př. 6: Jsou dány body $A[-1;0]$ a $B[0;4]$. Zapiš rovnici přímky *AB* v úsekovém tvaru a ve tvaru obecné rovnice přímky.

Známe průsečíky se souřadnými osami $\Rightarrow$ můžeme sestavit úsekový tvar rovnice přímky.

$$\frac{x}{-1} + \frac{y}{4} = 1$$

Obecnou rovnici získáme vynásobením: $\frac{x}{-1} + \frac{y}{4} = 1 \quad / \cdot (-4)$.

$4x - y = -4$

$4x - y + 4 = 0$

Př. 7: Rozhodni, které přímky není možné zapsat v úsekovém tvaru.

Jde o přímky, které nemají dva různé průsečíky se souřadnými osami (jejichž obecné rovnice nelze upravit na tvar $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$):

- přímky rovnoběžné se souřadnými osami (mají rovnice $x = k$ nebo $y = k$),
- přímky procházející počátkem (mají rovnice $y = kx$).

Př. 8: Je dána přímka $p = \{[2 + 3t; 3 + t], t \in R\}$. Najdi úsekový tvar její obecné rovnice a urči z něj její průsečíky se souřadnými osami.

Parametrické vyjádření:

$x = 2 + 3t$

$y = 3 + t, t \in R \quad \Rightarrow \quad t = y - 3$

Dosadíme do první rovnice: $x = 2 + 3(y - 3)$

$x = 2 + 3y - 9$

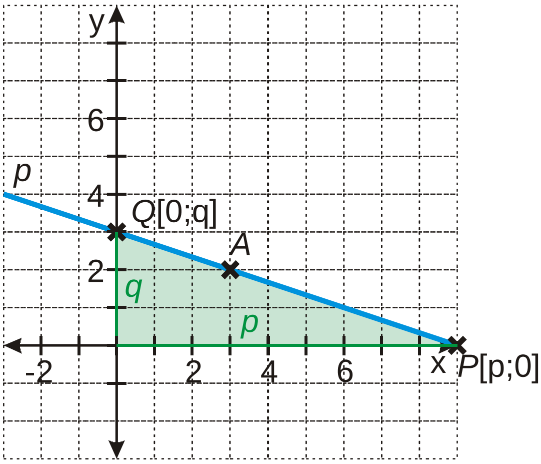
$x - 3y = -7 \quad / : -7$

$$\frac{x}{-7} + \frac{3y}{7} = 1$$

$\frac{x}{-7}+\frac{y}{\frac{7}{3}}=1 \Rightarrow$ přímka p se se souřadnými osami protíná v bodech $X[-7;0]$ a $Y\left[0;\frac{7}{3}\right]$

Př. 9: Je dán bod $A[3;2]$. Urči přímku p tak, aby procházela bodem A s spolu s osami určovala trojúhelník o obsahu 13,5.

Nakreslíme obrázek situace:



Body, ve kterých se přímka protíná s osami označíme $P[p;0]$ a $Q[0;q]$. Pokud určíme jejich souřadnice (čísla p a q), určíme i rovnici přímky $\Rightarrow$ potřebujeme dvě rovnice.

1. Vzniklý trojúhelník je pravoúhlý s odvěsnami p a q. $\Rightarrow$ obsah trojúhelníku vypočteme podle vzorce $S=\frac{ab}{2}=\frac{pq}{2}=13,5$.

2. Přímku p můžeme zapsat v úsekovém tvaru: $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$. Na přímce leží bod $A \Rightarrow$ dosadíme jej do rovnice: $\frac{3}{p}+\frac{2}{q}=1$.

Řešíme soustavu.
$$\frac{pq}{2}=13,5 \quad /\cdot 2$$
$$\frac{3}{p}+\frac{2}{q}=1 \quad /\cdot pq$$

$pq=27 \Rightarrow q=\frac{27}{p}$

$3q+2p=pq$

Dosadíme za q a získáme rovnici: $3\frac{27}{p}+2p=p\frac{27}{p}$.

$\frac{81}{p}+2p=27 \quad /\cdot p$

$2p^2-27p+81=0$

$$p_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-27)\pm\sqrt{(27)^2-4\cdot 2\cdot 81}}{2\cdot 2}=\frac{27\pm 9}{4}$$

$p_1 = \frac{27+9}{4} = 9$ $\qquad$ $p_2 = \frac{27-9}{4} = 4,5$

Příklad má dvě řešení.

$p_1 = 9 \Rightarrow q_1 = \frac{27}{p_1} = \frac{27}{9} = 3$

Rovnice přímky v úsekovém tvaru: $\frac{x}{9} + \frac{y}{3} = 1$.

Obecná rovnice přímky: $x + 3y - 9 = 0$.

$p_2 = 4,5 \Rightarrow q_2 = \frac{27}{p_2} = \frac{27}{4,5} = 6$

Rovnice přímky v úsekovém tvaru: $\frac{x}{4,5} + \frac{y}{6} = 1$.

Obecná rovnice přímky: $4x + 3y - 18 = 0$.

Poznámka: Pomocí bodů $P[p;0]$ a $Q[0;q]$ můžeme sestavit i obecnou rovnici hledané přímky a dosazovat do ní. $\boldsymbol{u} = Q - P = [-p;q]$, $\boldsymbol{n} = (q;p) \Rightarrow qx + py + c = 0$, dosadíme $Q[0;q]$: $q \cdot 0 + p \cdot q + c = 0 \Rightarrow c = -pq \Rightarrow p: qx + py - pq = 0$.

Dosazení bodu $A[3;2]$: $3q + 2p - pq = 0$ (stejná rovnice jako v původním řešení).

Př. 10: Petáková:
strana 106/cvičení 18
strana 106/cvičení 21 a) c)

Shrnutí: Úsekový tvar rovnice přímky umožňuje ihned určit průsečíky se souřadnými osami.