

7.3.11 Úsekový tvar rovnice přímky

Předpoklady: 070307

Př. 1: Jakou podmínku splňují body ležící na ose x ? Pomocí dvou bodů na ose x sestav parametrickou a obecnou rovnici této přímky.

Body na ose x například: $[2;0]$, $[15;0]$, $[-3;0] \Rightarrow$ společná vlastnost: y -ová souřadnice je nulová (jde o body $[x;0]$).

Parametrické vyjádření: body $[1;0]$, $[2;0] \Rightarrow \mathbf{u} = (1;0)$, bod $[0,0]$

$x = 0 + t$
 $y = 0, t \in \mathbb{R}$ (jasné, x -ová souřadnice bodů na ose x může být cokoliv, y -ová je nulová)

Obecná rovnice: $\mathbf{u} = (1;0) \Rightarrow \mathbf{n} = (0;1) \Rightarrow$ rovnice $0x + y + c = 0$

Dosadíme bod $[0;0]$: $0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

Rovnice osy x : $y = 0$ (jasné, jde o vyjádření podmínky ze začátku příkladu pomocí rovnice)

Všechny tři způsoby, jak popsat osu x , říkají to samé.

- Jde o body $[x;0] \Rightarrow x$ -ová souřadnice může být libovolná, y -ová souřadnice musí být nulová \Rightarrow tyto body můžeme zapsat podmínkou $y = 0$ (obecná rovnice ve třetím bodu).
- Parametrické vyjádření $\begin{matrix} x = 0 + t \\ y = 0, t \in \mathbb{R} \end{matrix} \Rightarrow x$ -ová souřadnice může být libovolná (za t můžeme dosadit cokoliv), y -ová souřadnice musí být nulová.
- Obecná rovnice $y = 0 \Rightarrow x$ -ová souřadnice může být libovolná (není pro ni stanovena žádná podmínka), y -ová souřadnice musí být nulová.

Pedagogická poznámka: Příklad je zařazen ze tří důvodů (rozhodně není zbytečný):

kvůli snadnějšímu řešení příkladu 3,
zopakování základních druhů rovnic přímky (postupy, které obsahují hodně nul,
jsou pro žáky obecně méně příjemné, mají pocit, že jde o něco zvláštního),
je ukázkou skutečnosti, že třemi různými způsoby říkáme prakticky to samé
(pokud jsme schopni rovnice interpretovat).

Př. 2: Jakou podmínku splňují body ležící na ose y ? Sestav parametrickou a obecnou rovnici osy y . Využij řešení předchozího příkladu.

Podle předchozího příkladu můžeme psát rovnou:

- jde o body $[0; y]$ (x -ová souřadnice je nulová, y -ová libovolná),
- parametrické vyjádření $\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 + t, t \in \mathbb{R} \end{matrix}$,
- obecná rovnice $x = 0$.

Dodatek: Při řešení předchozího příkladu bychom samozřejmě mohli postupovat stejně jako v příkladu 1, ale nedává to moc smysl a nikdo to nedělá (a asi by ani neměl).

Body na ose y například: $[0;1]$, $[0;1532]$, $[0;-562] \Rightarrow$ společná vlastnost: x -ová souřadnice je nulová (jde o body $[0; y]$).

Parametrické vyjádření: Body $[0;1]$, $[0;2] \Rightarrow \mathbf{u} = (0;1)$, bod $[0,0]$

$$x = 0$$

$y = 0 + t, t \in R$ (jasné, y -ová souřadnice bodů na ose y může být cokoliv, x -ová je nulová)

Obecná rovnice: $\mathbf{u} = (0;1) \Rightarrow \mathbf{n} = (1;0) \Rightarrow$ rovnice $x + 0y + c = 0$

Dosadíme bod $[0;0]$: $0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$.

Rovnice osy y : $x = 0$ (jasné, jde o vyjádření podmínky ze začátku příkladu pomocí rovnice).

Př. 3: Je dána přímka $p: 3x + 4y - 12 = 0$. Urči průsečíky přímky p s osami x a y .

Průsečík s osou x \Rightarrow nulová y -ová souřadnice $\Rightarrow A[a_x; 0]$.

Dosadíme bod $A[a_x; 0]$ do rovnice přímky p : $3a_x + 4 \cdot 0 - 12 = 0$.

$$3a_x = 12$$

$a_x = 4 \Rightarrow$ přímka p se protíná s osou x v bodě $A[4; 0]$.

Průsečík s osou y \Rightarrow nulová x -ová souřadnice $\Rightarrow B[0; b_y]$.

Dosadíme bod $B[0; b_y]$ do rovnice přímky p : $3 \cdot 0 + 4 \cdot b_y - 12 = 0$.

$$4b_y = 12$$

$b_y = 3 \Rightarrow$ přímka p se protíná s osou y v bodě $B[0; 3]$.

Dodatek: Řešení předchozího příkladu si můžeme zdůvodnit i jinak. Průsečík přímky p s osou x je průsečík přímek $3x + 4y - 12 = 0$ a $y = 0$ (obecná rovnice osy x) \Rightarrow

řešíme soustavu rovnic:
$$\begin{array}{l} 3x + 4y - 12 = 0 \\ y = 0 \end{array} \Rightarrow$$
 dosadíme z druhé rovnice do první:

$3x + 4 \cdot 0 - 12 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow A[4; 0]$. Podobně průsečík s osou y .

Jde samozřejmě o to samé jako v řešení příkladu, jen je to trochu jinak okomentované.

Postřeh: Pro přímku $p: 3x + 4y - 12 = 0$ jsme získali průsečíky $A[4; 0]$ a $B[0; 3]$. Nenulové souřadnice průsečíků vystupují i v rovnici přímky (ale u opačných souřadnic). Není to náznak nějakého pravidla?

Zkusíme si upravit rovnici přímky.

$$3x + 4y - 12 = 0$$

$$3x + 4y = 12 \quad /:12$$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$$

Neznámé x a y jsou ve zlomcích, jejichž jmenovatelé jsou souřadnicemi průsečíků se souřadnými osami. Zkusíme průsečíky do tohoto tvaru rovnice dosadit, abychom zjistili, jak pro ně rovnice vychází:

- $A[4;0]: \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = \frac{4}{4} + \frac{0}{3} = 1,$
- $B[0;3]: \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = \frac{0}{4} + \frac{3}{3} = 1.$

Nejde o náhodu, pokud obecnou rovnici přímky upravíme tak, aby na pravé straně byla jednička, proběhne vynulování levé strany dosazením průsečíku vždy \Rightarrow získali jsme **úsekový tvar rovnice přímky**.

Dodatek: Žáky, kteří vidí dosazení ihned, můžete nechat samostatně napsat modrý rámeček.

Další ukázka toho, jak si napsat rovnici ve tvaru, ze kterého můžeme něco poznat.

Jsou dány body $P[p;0]$ a $Q[0;q]$, kde $p \neq 0$ a $q \neq 0$ (tedy body P a Q jsou body na souřadnicových osách různé od počátku). Přímka PQ má rovnici $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

Je-li přímka napsaná ve tvaru $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, kde $p \neq 0$ a $q \neq 0$, protíná se se souřadnými osami v bodech $P[p;0]$ a $Q[0;q]$.

Rovnice $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ se nazývá úsekový tvar přímky.

Př. 4: Dosazením ověř, zda platí, že přímka napsaná ve tvaru $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, kde $p \neq 0$ a $q \neq 0$, se protíná se souřadnými osami v bodech $P[p;0]$ a $Q[0;q]$.

Dosadíme $P[p;0]$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{p} + \frac{y}{q} &= 1 \\ \frac{p}{p} + \frac{0}{q} &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Dosadíme $Q[0;q]$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{p} + \frac{y}{q} &= 1 \\ \frac{0}{p} + \frac{q}{q} &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Př. 5: Zadané obecné rovnice převed' do úsekového tvaru a z něj urči průsečíky se souřadnými osami.

a) $2x - 3y - 6 = 0$

b) $8x + y - 4 = 0$

a) $2x - 3y - 6 = 0 \quad / +6$
 $2x - 3y = 6 \quad / :6$

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$$

$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1 \Rightarrow$ přímka se protíná se souřadnými osami v bodech $X[3; 0]$ a $Y[0; -2]$.

b) $8x + y - 4 = 0 \quad / +4$

$$8x + y = 4 \quad / :4$$

$$2x + \frac{y}{4} = 1$$

$\frac{x}{1} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow$ přímka se protíná se souřadnými osami v bodech $X\left[\frac{1}{2}; 0\right]$ a $Y[0; 4]$.

Př. 6: Jsou dány body $A[-1; 0]$ a $B[0; 4]$. Zapiš rovnici přímky AB v úsekovém tvaru a ve tvaru obecné rovnice přímky.

Známe průsečíky se souřadnými osami \Rightarrow můžeme sestavit úsekový tvar rovnice přímky.

$$\frac{x}{-1} + \frac{y}{4} = 1$$

Obecnou rovnici získáme vynásobením: $\frac{x}{-1} + \frac{y}{4} = 1 \quad / \cdot (-4)$.

$$4x - y = -4$$

$$4x - y + 4 = 0$$

Př. 7: Rozhodni, které přímky není možné zapsat v úsekovém tvaru.

Jde o přímky, které nemají dva různé průsečíky se souřadnými osami (jejichž obecné rovnice

nelze upravit na tvar $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$):

- přímky rovnoběžné se souřadnými osami (mají rovnice $x = k$ nebo $y = k$),
- přímky procházející počátkem (mají rovnice $y = kx$).

Př. 8: Je dána přímka $p = \{[2 + 3t; 3 + t], t \in R\}$. Najdi úsekový tvar její obecné rovnice a urči z něj její průsečíky se souřadnými osami.

Parametrické vyjádření:

$$\begin{aligned} x &= 2 + 3t \\ y &= 3 + t, t \in R \end{aligned} \Rightarrow t = y - 3$$

Dosadíme do první rovnice: $x = 2 + 3(y - 3)$

$$x = 2 + 3y - 9$$

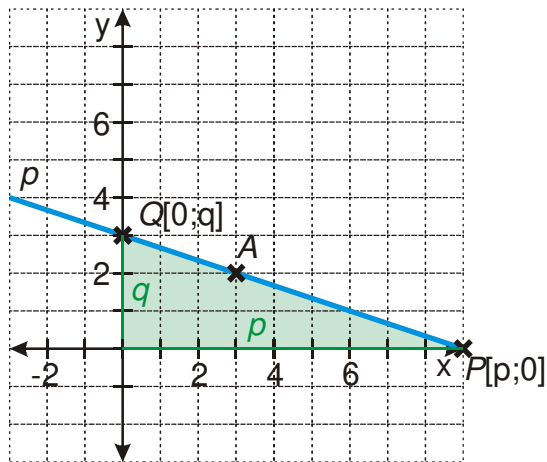
$$x - 3y = -7 \quad / : -7$$

$$\frac{x}{-7} + \frac{3y}{7} = 1$$

$$\frac{x}{-7} + \frac{y}{\frac{7}{3}} = 1 \Rightarrow \text{přímka } p \text{ se souřadnými osami protíná v bodech } X[-7; 0] \text{ a } Y\left[0; \frac{7}{3}\right]$$

Př. 9: Je dán bod $A[3; 2]$. Urči přímku p tak, aby procházela bodem A a spolu s osami určovala trojúhelník o obsahu 13,5.

Nakreslíme obrázek situace:



Body, ve kterých se přímka protíná s osami, označíme $P[p; 0]$ a $Q[0; q]$. Pokud určíme jejich souřadnice (čísla p a q), určíme i rovnici přímky \Rightarrow potřebujeme dvě rovnice.

1. Vzniklý trojúhelník je pravoúhlý s odvěsnami p a q . \Rightarrow obsah trojúhelníku vypočteme

$$\text{podle vzorce } S = \frac{ab}{2} = \frac{pq}{2} = 13,5.$$

2. Přímku p můžeme zapsat v úsekovém tvaru: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$. Na přímce leží bod $A \Rightarrow$ dosadíme

$$\text{jej do rovnice: } \frac{3}{p} + \frac{2}{q} = 1.$$

$$\frac{pq}{2} = 13,5 \quad | \cdot 2$$

Řešíme soustavu.

$$\frac{3}{p} + \frac{2}{q} = 1 \quad | \cdot pq$$

$$pq = 27 \Rightarrow q = \frac{27}{p}$$

$$3q + 2p = pq$$

$$\text{Dosadíme za } q \text{ a získáme rovnici: } 3 \frac{27}{p} + 2p = p \frac{27}{p}.$$

$$\frac{81}{p} + 2p = 27 \quad | \cdot p$$

$$2p^2 - 27p + 81 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-27) \pm \sqrt{(27)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 81}}{2 \cdot 2} = \frac{27 \pm 9}{4}$$

$$p_1 = \frac{27+9}{4} = 9$$

$$p_2 = \frac{27-9}{4} = 4,5$$

Příklad má dvě řešení.

$$p_1 = 9 \Rightarrow q_1 = \frac{27}{p_1} = \frac{27}{9} = 3$$

$$p_2 = 4,5 \Rightarrow q_2 = \frac{27}{p_2} = \frac{27}{4,5} = 6$$

Rovnice přímky v úsekovém tvaru: $\frac{x}{9} + \frac{y}{3} = 1$.

Rovnice přímky v úsekovém tvaru:

Obecná rovnice přímky: $x + 3y - 9 = 0$.

$$\frac{x}{4,5} + \frac{y}{6} = 1.$$

Obecná rovnice přímky: $4x + 3y - 18 = 0$.

Poznámka: Pomocí bodů $P[p;0]$ a $Q[0;q]$ můžeme sestavit i obecnou rovnici hledané přímky a dosazovat do ní. $\mathbf{u} = Q - P = [-p; q]$, $\mathbf{n} = (q; p) \Rightarrow qx + py + c = 0$, dosadíme

$$Q[0;q]: q \cdot 0 + p \cdot q + c = 0 \Rightarrow c = -pq \Rightarrow p: qx + py - pq = 0.$$

Dosazení bodu $A[3;2]: 3q + 2p - pq = 0$ (stejná rovnice jako v původním řešení).

Př. 10: Petáková:

strana 106/cvičení 18

strana 106/cvičení 21 a) c)

Shrnutí: Úsekový tvar rovnice přímky umožňuje ihned určit průsečíky se souřadnými osami.