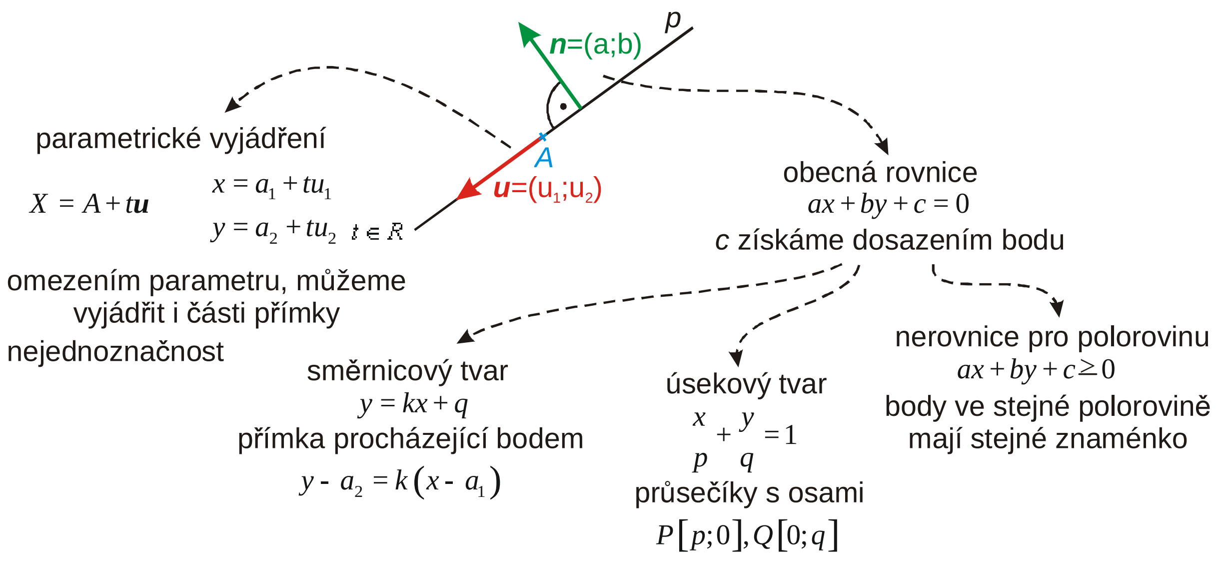
7.3.11 Polohové úlohy v rovině

Předpoklady: 7310

Pedagogická poznámka: Pokud necháte studenty sestavit přehled při hodině a budete chtít spočítat všechny příklady, budete potřebovat dvě vyučovací hodiny. Hodinu je možné stihnout i během 45 minut, přehled si studenti udělají doma, ve škole ho pouze zkontrolujete a u příkladů si projdete řešení bez toho, aby je studenti dopočítávali. Moc to ale nedoporučuji, protože zkušenosti z hodin ukazují, že není v silách velké většiny žáků, něco smysluplného sestavit. Většinou pouze vypíšou základní tvary, ale rozhodně nejsou schopni dokreslit závislosti nebo poznámky o výhodách a nevýhodách.

Př. 1: Zkus přehledně uspořádat dosud probrané poznatky z analytické geometrie. Jak spolu a se způsoby zadání přímky souvisí parametrické vyjádření přímky, její obecná rovnice, směrnicový a úsekový tvar? Se kterým z uvedených způsobů vyjádření přímky souvisí nerovnice pro polorovinu?



x,y - neznámé, místo pro dosazení souřadnic bodů

a,b,c,p,q,a_1*,*a_2,... - čísla, která rozlišují různé přímky od sebe navzájem

průsečíky - splňují obojí rovnice- řešení soustav

Př. 2: Urči vzájemnou polohu přímek $p: 2x - 3y + 1 = 0$ a $q = \{[1-6t; -2-4t], t \in R\}$.

Přímky jsou dány obecnou rovnicí a parametrickým vyjádřením $\Rightarrow$ snadno můžeme nalézt průsečíky a z jejich počtu určíme vzájemnou polohu.

$p: 2x - 3y + 1 = 0$ a q: $\begin{aligned} x &= 1-6t \\ y &= -2-4t, t \in R \end{aligned}$ $\Rightarrow$ dosadíme z vyjádření q do rovnice pro p.

$2(1-6t) - 3(-2-4t) + 1 = 0$

$2-12t+6+12t+1=0$
$9=0 \Rightarrow$ přímky p a q nemají společný bod $\Rightarrow$ jsou rovnoběžné.

Pedagogická poznámka: Studenti samozřejmě mohou postupovat i spoustou jiných způsobů. Poměrně často se stává, že si studenti, kteří vzájemnou polohu určují z vektorů, neuvědomí, že pro přímku p získají z rovnice normálový vektor, pro přímku q vektor směrový a tedy nemohou očekávat, že při rovnoběžnosti těchto přímek by jeden z těchto vektorů byl násobkem druhého.

Př. 3: Najdi obecnou rovnici osy úsečky AB; $A[-2;1]$, $B[4;-3]$.

Osa úsečky AB je přímka kolmá na úsečku AB procházející jejím středem $\Rightarrow$
$\boldsymbol{u}_{AB}=B-A=(6;-4)$ je směrový vektor přímky AB a tedy jeden z normálových vektorů hledané osy $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n}_{osy}=(3;-2)$ (vektor zkrátíme) $\Rightarrow$
obecná rovnice osy: $3x-2y+c=0$,
bod na ose $S_{AB}[1;-1]$ $\Rightarrow$ $3\cdot 1-2(-1)+c=0$ $\Rightarrow$ $c=-5$,
rovnice osy úsečky AB: $3x-2y-5=0$.

Pedagogická poznámka: Pokud jste vynechali hodinu 7307 mají studenti s příkladem obrovské problémy. Je potřeba, aby si nakreslili obrázek a ujasnili si, jaký vektor pro sestavení obecné rovnice osy hledají (z obrázku jim pak dojde, že hledaným vektorem je vektor $B-A$). Je potřeba zabránit tomu, aby se v jejich poznámkách objevily zápisy typu: $\boldsymbol{u}=B-A=(6;-4)$ $\quad\quad$ $\boldsymbol{n}=(6;-4)$.

Není z nich jasné, že jde o vektory, které popisují dvě různé přímky a někteří studenti pak získávají pocit, že normálový vektor může být někdy shodný se směrovým.

Př. 4: Rozhodni, které z následujících přímek jsou totožné.

a) $4x-2y+2=0$ b) $\begin{array}{l} x=-1+t \\ y=1+2t, t\in R \end{array}$ c) $\{[1-t;1-2t], t\in R\}$

d) $y=2x+1$ e) $-2x+y+1=0$ f) $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$

Totožnost přímek snadno poznáme z obecné rovnice $\Rightarrow$ převedeme všechna vyjádření na obecné rovnice, které upravíme tak, aby před x bylo číslo 2 (tak můžeme pokrátit obecnou rovnici v bodě a) bez toho, aby se objevily zlomky).

a) $4x-2y+2=0 \Rightarrow 2x-y+1=0$

b) $\begin{array}{l} x=-1+t \\ y=1+2t, t\in R \end{array}$

Vyloučíme parametr z první rovnice: $x=-1+t \Rightarrow t=x+1$.
Dosadíme do druhé rovnice: $y=1+2(x+1)=1+2x+2=2x+3 \Rightarrow 2x-y+3=0$.

c) $\{[1-t;1-2t], t\in R\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=1-t \\ y=1-2t, t\in R \end{array}$

Vyloučíme parametr z první rovnice: $x=1-t \Rightarrow t=1-x$.
Dosadíme do druhé rovnice: $y=1-2(1-x)=1-2+2x=2x-1 \Rightarrow 2x-y-1=0$.

d) $y = 2x + 1 \Rightarrow 2x - y + 1 = 0$
e) $-2x + y + 1 = 0 \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$
f) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow 2x + y = 4 \Rightarrow 2x + y - 4 = 0$
$\Rightarrow$ Přímky a) až e) jsou rovnoběžné. Totožné jsou pak dvě dvojice přímek: přímky a), d) a přímky c), e).

Pedagogická poznámka: Snažím se, aby si studenti uvědomili, že je velmi výhodné v situaci, kdy sledovaných přímek poměrně dost, se pořádně rozmyslet, jaký postup je nejvhodnější.
Častý problém je nepřehledný zápis, pokud studenti ze sešitu nepoznají, která upravená rovnice patří ke kterému zadání, nemají šanci příklad úspěšně vyřešit.

Př. 5: Je dán trojúhelník *ABC*; $A[-1;-2]$, $B[3;-4]$, $C[5;5]$. Najdi patu výšky v_c. Najdi vyjádření výšky v_c (je myšlena přímo úsečka, ne přímka na které v_c leží).

Pata výšky v_c je průsečík přímky *AB* s přímkou, na které leží výška v_c (kolmice na *AB* procházející bodem *C*).
Průsečík nejsnáze určíme, pokud je jedna z přímek vyjádřena parametricky a druhá obecnou rovnicí. Protože úsečku můžeme vyjádřit pouze parametricky najdeme obecnou rovnici přímky *AB* a parametrické vyjádření přímky, na které leží v_c.

Obecná rovnice přímky *AB*
$B - A = (4;-2) \Rightarrow \boldsymbol{u}_{AB} = (2;-1) \Rightarrow \boldsymbol{n}_{AB} = (1;2) \Rightarrow$ rovnice $x + 2y + c = 0$.
Dosadíme bod *A*: $-1 + 2(-2) + c = 0 \Rightarrow c = 5$.
$x + 2y + 5 = 0$

Parametrické vyjádření přímky, na které leží v_c
Přímka je kolmá na přímku *AB* $\Rightarrow$ $\boldsymbol{u}_{v_c} = \boldsymbol{n}_{AB} = (1;2)$. Použijeme bod $C[5;5]$.
Přímka, na které leží v_c: $\begin{array}{l} x = 5 + t \\ y = 5 + 2t, t \in R \end{array}$.

Pata výšky v_c
Hledáme průsečík přímek $x + 2y + 5 = 0$ a $\begin{array}{l} x = 5 + t \\ y = 5 + 2t, t \in R \end{array}$.
$(5 + t) + 2(5 + 2t) + 5 = 0$
$5 + t + 10 + 4t + 5 = 0$
$5t = -20$
$t = -4$
Dopočteme patu výšky C_0: $\begin{array}{l} x = 5 + t = 5 + (-4) = 1 \\ y = 5 + 2t = 5 + 2(-4) = -3 \end{array}$.
Patou výšky je bod $C_0[1;-3]$.
Vyjádření výšky v_c: $\begin{array}{l} x = 5 + t \\ y = 5 + 2t, t \in \langle -4;0 \rangle \end{array}$.
Výška v_c je úsečka ohraničená body *C* ($t = 0$) a C_0 ($t = -4$).

Pedagogická poznámka: Opět zdůrazňuji studentům, aby si příklad dobře rozmysleli. Pokud nevyjádří přímku, na které leží výška, parametricky, najdou sice průsečík, ale vyjádření výšky (úsečky) musí spočítat celé. Při postupu použitém v řešení mají vyjádření výšky hotové prakticky ihned.

Další kámen úrazu je při vyjadřování úsečky, kde žáci automaticky píší $t \in \langle 0;1 \rangle$, nechávám je nakreslit obrázek, který obsahuje směrový vektor, o kterém víme, že v parametrickém vyjádření $X = C + t\boldsymbol{u}$, ho musíme vynásobit (-4), abychom se z bodu C posunuli do body C_0.

Př. 6: Napiš pomocí parametru všechny přímky, které procházejí bodem $B[-2;3]$ a s osou x svírají kladný úhel větší než $45°$.

Zapisujeme přímky procházející daným bodem $\Rightarrow$ směrnicový tvar $y - a_2 = k(x - a_1)$.

Dosadíme bod $B[-2;3]$: $y - 3 = k(x - [-2])$.

Zbývá určit hodnoty směrnice k: kladný úhel větší než $45°$ ($\varphi > 45°$) $\Rightarrow$ $k = \mathrm{tg}\varphi > 1$ $\Rightarrow$ $k \in (1;\infty)$ $\Rightarrow$ hledané přímky můžeme zapsat: $y - 3 = k(x + 2)$, $k \in (1;\infty)$.

Př. 7: Urči všechny hodnoty parametru m, pro které jsou přímky $p: mx + 6y - 2my + 3 = 0$ a $q: 2x + my + 1 = 0$ a) navzájem kolmé; b) rovnoběžné.

a) přímky jsou navzájem kolmé

Přímky jsou navzájem kolmé, právě když jsou navzájem kolmé jejich normálové vektory a tedy je nulový jejich skalární součin.

$\boldsymbol{n}_p = (m; 6 - 2m)$, $\boldsymbol{n}_q = (2; m)$ a platí $\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{n}_q = 0$.

Dosadíme: $\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{n}_q = (m; 6 - 2m) \cdot (2; m) = 2m + 6m - 2m^2 = 0$.

$8m - 2m^2 = 0$

$m(4 - m) = 0 \Rightarrow m_1 = 0,\ m_2 = 4$

b) přímky jsou navzájem rovnoběžné

Přímky jsou navzájem rovnoběžné, když jejich normálové vektory jsou svými násobky.

$\boldsymbol{n}_p = (m; 6 - 2m)$, $\boldsymbol{n}_q = (2; m)$ a platí $\boldsymbol{n}_p = k \cdot \boldsymbol{n}_q$.

Dosadíme: $\boldsymbol{n}_p = k \cdot \boldsymbol{n}_q \Rightarrow (m; 6 - 2m) = k(2; m)$.

Soustava rovnic: $\begin{matrix} m = 2k \\ 6 - 2m = km \end{matrix}$.

Z první rovnice dosadíme do druhé: $6 - 2 \cdot 2k = k \cdot 2k \quad / : 2$.

$3 - 2k = k^2$

$k^2 + 2k - 3 = 0$

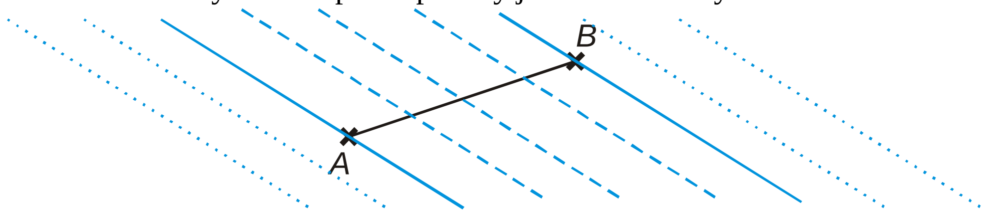
$(k + 3)(k - 1) = 0$

$k_1 = -3 \Rightarrow m_1 = 2k = 2 \cdot (-3) = -6$ $\qquad$ $k_2 = 1 \Rightarrow m_2 = 2k = 2 \cdot 1 = 2$

Pedagogická poznámka: Pro mnohé žáky je problémem zapsat si souřadnice normálového vektoru přímky *p*. Někteří dokonce bojují s tím, jestli je to rovnice přímky, když je tam *y* dvakrát. Většinou stačí poradit, aby si *y* vytkli.

Př. 8: Najdi všechny hodnoty parametru *c*, pro které se přímky $2x+y+c=0$ protíná s úsečkou *AB*, $A[-1;5]$, $B[2;1]$.

Hodnota parametru *c* ovlivňuje posunutí přímky ve svislém (vodorovném) směru nemění její směr $\Rightarrow$ všechny takto zapsané přímky jsou rovnoběžky. Nakreslíme si obrázek.



Z obrázku vidíme, že pro dvě hodnoty parametru c_A, c_B se přímky prochází krajními body *A*, *B*, pro hodnoty parametru v intervalu $\langle c_A; c_B\rangle$ pak přímky prochází vnitřními body úsečky *AB*.
Dosadíme do rovnice přímky bod $A[-1;5]$: $2(-1)+5+c_A=0 \Rightarrow c_A=-3$.
Dosadíme do rovnice přímky bod $B[2;1]$: $2\cdot 2+1+c_B=0 \Rightarrow c_B=-5$.
Přímka $2x+y+c=0$ se protíná s úsečkou *AB* pro hodnoty parametru $c\in\langle -5;-3\rangle$.

Př. 9: Najdi přímku, která prochází bodem $A[2;3]$ a platí pro ní, že její průsečík s osou *x* je od počátku soustavy souřadnic dvakrát vzdálenější než průsečík s osou *y*.

Zajímáme se o průsečíky s osami $\Rightarrow$ použijeme úsekový tvar $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$.

Průsečík s osou *x*: $P[p;0]$ $\Rightarrow$ průsečík s osou *y*: $Q\left[0;\pm\frac{p}{2}\right]$ (aby vzdálenost od počátku byla poloviční než u průsečíku s osou *x*) $\Rightarrow$ pokračujeme ve dvou sloupcích.

$q=\frac{p}{2}$ | $q=-\frac{p}{2}$

Dosadíme do rovnice přímky.

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{\frac{p}{2}}=\frac{x}{p}+\frac{2y}{p}=1 \qquad \frac{x}{p}-\frac{y}{\frac{p}{2}}=\frac{x}{p}-\frac{2y}{p}=1$$

Rovnici přímky musí vyhovovat bod $A[2;3]$.

$\frac{2}{p}+\frac{2\cdot 3}{p}=1 \quad /\cdot p$
$2+6=p$
$p=8$

Přímka: $\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1$, průsečíky: $P[8;0]$, $Q[0;4]$.

$\frac{2}{p}-\frac{2\cdot 3}{p}=1 \quad /\cdot p$
$2-6=p$
$p=-4$

Přímka: $-\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$, průsečíky: $P[-4;0]$, $Q[0;2]$.

Př. 10: Jsou dány dvě přímky: jedna je zadána obecnou rovnicí, druhá parametricky. Rozhodni co nejrychleji, bez určení průsečíků, zda jsou rovnoběžné (případně totožné) nebo různoběžné. Navržený postup ověř na přímkách z příkladu 2, $p: 2x-3y+1=0$ a $q=\{[1-6t;-2-4t], t\in R\}$.

Dvě přímky jsou rovnoběžné (nebo totožné) pokud mají stejný směr. Pokud je jedna z přímek dána obecnou rovnicí, musí být její normálový vektor kolmý na směrový vektor druhé přímky (aby byl jejím normálovým vektorem také) $\Rightarrow$ skalární součin normálového vektoru jedné a směrového vektoru druhé přímky musí být nulový.

$p: 2x-3y+1=0 \Rightarrow \boldsymbol{n}_p=(2;-3)$

$q=\{[1-6t;-2-4t], t\in R\} \Rightarrow \boldsymbol{u}_q=(-6;-4)$

$\boldsymbol{n}_p\cdot\boldsymbol{u}_q=(2;-3)\cdot(-6;-4)=2\cdot(-6)+(-3)\cdot(-4)=0 \Rightarrow$ přímky *p*, *q* jsou rovnoběžné nebo totožné (jak už víme z příkladu 2).

Př. 11: Je dán trojúhelník *ABC*, $A[-3;1]$, $B[3;-2]$, $C[1;4]$. Rozhodni, zda bod $D[-2;2]$ leží uvnitř trojúhelníku *ABC*. Pokud bod *D* uvnitř trojúhelníku *ABC* neleží, rozhodni, ve které z částí roviny rozdělené stranami trojúhelníku bod *D* leží.

Bod *D* leží uvnitř trojúhelníka, právě když leží:

- vzhledem k přímce *AB* ve stejné polorovině jako bod *C*,
- vzhledem k přímce *BC* ve stejné polorovině jako bod *A*,
- vzhledem k přímce *AC* ve stejné polorovině jako bod *B*.

V případě, že bod *D* nebude ležet uvnitř trojúhelníku, můžeme z předchozích nerovností určit jeho polohu v rovině.

Leží bod *D* vzhledem k přímce *AB* ve stejné polorovině jako bod *C*?

Rovnice přímky *AB*: $B-A=(6;-3)\Rightarrow(2;-1)\Rightarrow\boldsymbol{n}_{AB}=(1;2) \Rightarrow$ rovnice $x+2y+c=0$, dosadíme bod $A[-3;1]$: $(-3)+2\cdot1+c=0 \Rightarrow c=1 \Rightarrow$ rovnice $x+2y+1=0$.

- Bod $C[1;4]$: $x+2y+1=1+2\cdot4+1=10$,
- bod $D[-2;2]$: $x+2y+1=(-2)+2\cdot2+1=3$,

$\Rightarrow$ bod *D* leží vzhledem k přímce *AB* ve stejné polorovině jako bod *C*.

Leží bod *D* vzhledem k přímce *BC* ve stejné polorovině jako bod *A*?

Rovnice přímky *BC*: $C-B=(-2;6)\Rightarrow(-1;3)\Rightarrow\boldsymbol{n}_{BC}=(3;1) \Rightarrow$ rovnice $3x+y+c=0$, dosadíme bod $B[3;-2]$: $3\cdot3+(-2)+c=0 \Rightarrow c=-7 \Rightarrow$ rovnice $3x+y-7=0$.

- Bod $A[-3;1]$: $3x+y-7=3(-3)+1-7=-15$,
- bod $D[-2;2]$: $3x+y-7=3(-2)+2-7=-11$,

$\Rightarrow$ bod *D* leží vzhledem k přímce *BC* ve stejné polorovině jako bod *A*.

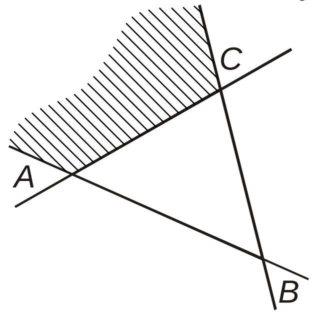
Leží bod *D* vzhledem k přímce *AC* ve stejné polorovině jako bod *B*?

Rovnice přímky *AC*: $C-A=(4;3)\Rightarrow\boldsymbol{n}_{AC}=(3;-4) \Rightarrow$ rovnice $3x-4y+c=0$, dosadíme bod $A[-3;1]$: $3(-3)-4\cdot1+c=0 \Rightarrow c=13 \Rightarrow$ rovnice $3x-4y+13=0$.

- Bod $B[3;-2]$: $3x-4y+13=3\cdot3-4\cdot(-2)+13=14$,

- bod $D[-2;2]$: $3x-4y+13=3\cdot(-2)-4\cdot 2+13=-1$,

$\Rightarrow$ bod *D* leží vzhledem k přímce *AC* v opačné polorovině než bod *B*.
Bod *D* neleží uvnitř trojúhelníka *ABC*, leží v oblasti vyznačené na obrázku.



Shrnutí:	Poznatků, které si musíme z analytické geometrie pamatovat je překvapivě málo, pokud jsou dobře poskládané.