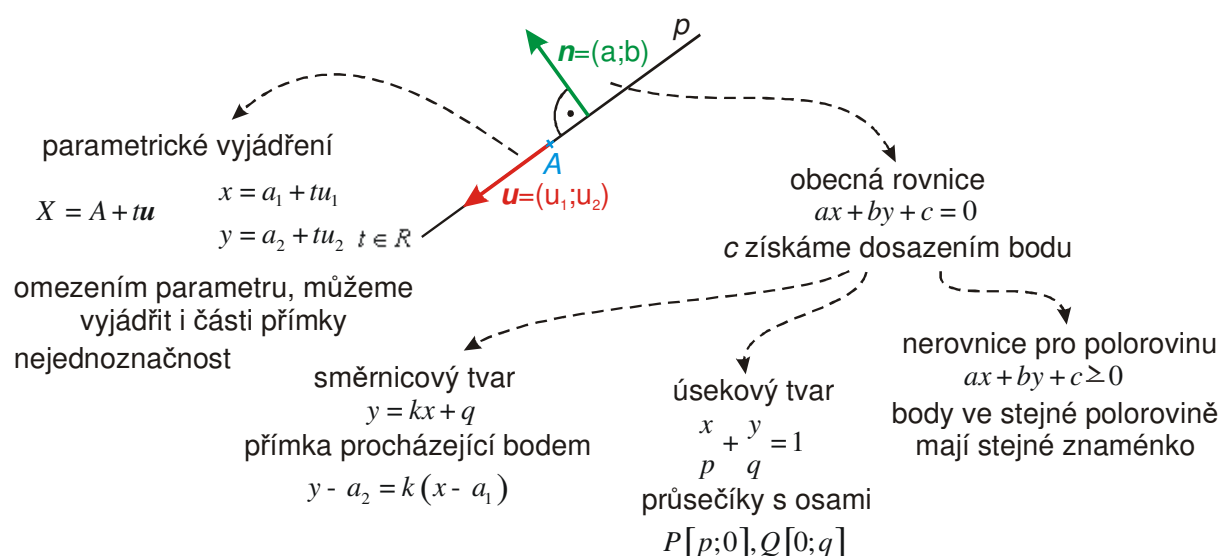


7.3.12 Polohové úlohy v rovině I

Předpoklady: 070311

Pedagogická poznámka: Vytvoření přehledu žáci dostávají jako dobrovolný domácí úkol na konci předchozího hodiny. Svoji verzi okomentují během přepisování na tabuli a nechám ho na ní po zbytek hodiny napsaný.

Př. 1: Zkus přehledně uspořádat dosud probrané poznatky z analytické geometrie. Jak spolu a se způsoby zadání přímky souvisí parametrické vyjádření přímky, její obecná rovnice, směrnicový a úsekový tvar? Se kterým z uvedených způsobů vyjádření přímky souvisí nerovnice pro polorovinu?



x, y - neznámé, místo pro dosazení souřadnic bodů
 $a, b, c, p, q, a_1, a_2, \dots$ - čísla, která rozlišují různé přímky od sebe navzájem
 průsečíky - splňují obojí rovnice- řešení soustav

Př. 2: Urči vzájemnou polohu přímek $p: 2x - 3y + 1 = 0$ a $q = \{[1 - 6t; -2 - 4t], t \in \mathbb{R}\}$.

Přímky jsou dány obecnou rovnicí a parametrickým vyjádřením \Rightarrow snadno můžeme nalézt průsečíky a z jejich počtu určíme vzájemnou polohu.

$$p: 2x - 3y + 1 = 0 \text{ a } q: \begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = -2 - 4t, t \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \text{dosadíme z vyjádření } q \text{ do rovnice pro } p.$$

$$2(1 - 6t) - 3(-2 - 4t) + 1 = 0$$

$$2 - 12t + 6 + 12t + 1 = 0$$

$9 = 0 \Rightarrow$ přímky p a q nemají společný bod \Rightarrow jsou rovnoběžné.

Pedagogická poznámka: Studenti samozřejmě mohou postupovat i spoustou jiných způsobů. Poměrně často se stává, že si studenti, kteří vzájemnou polohu určují z vektorů,

neuvědomí, že pro přímkou p získají z rovnice normálový vektor, pro přímkou q vektor směřový a tedy nemohou očekávat, že při rovnoběžnosti těchto přímek by jeden z těchto vektorů byl násobkem druhého.

Př. 3: Najdi obecnou rovnici osy úsečky AB ; $A[-2;1]$, $B[4;-3]$.

Osa úsečky AB je přímka kolmá na úsečku AB procházející jejím středem \Rightarrow

$\mathbf{u}_{AB} = B - A = (6; -4)$ je směřový vektor přímky AB a tedy jeden z normálových vektorů

hledané osy $\Rightarrow \mathbf{n}_{osy} = (3; -2)$ (vektor zkrátíme) \Rightarrow

obecná rovnice osy: $3x - 2y + c = 0$,

bod na ose $S_{AB}[1; -1] \Rightarrow 3 \cdot 1 - 2(-1) + c = 0 \Rightarrow c = -5$,

rovnice osy úsečky AB : $3x - 2y - 5 = 0$.

Pedagogická poznámka: Pokud jste vynechali hodinu 7307, mají studenti s příkladem obrovské problémy. Je potřeba, aby si nakreslili obrázek a ujasnili si, jaký vektor pro sestavení obecné rovnice osy hledají (z obrázku jim pak dojde, že hledaným vektorem je vektor $B - A$). Je potřeba zabránit tomu, aby se v jejich poznámkách objevily zápisy typu: $\mathbf{u} = B - A = (6; -4)$ $\mathbf{n} = (6; -4)$.

Není z nich jasné, že jde o vektory, které popisují dvě různé přímky a někteří studenti pak získávají pocit, že normálový vektor může být někdy shodný se směřovým.

Př. 4: Rozhodni, které z následujících přímek jsou totožné.

a) $4x - 2y + 2 = 0$ b) $\begin{matrix} x = -1 + t \\ y = 1 + 2t, t \in R \end{matrix}$ c) $\{[1-t; 1-2t], t \in R\}$

d) $y = 2x + 1$ e) $-2x + y + 1 = 0$ f) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$

Totožnost přímek snadno poznáme z obecné rovnice \Rightarrow převedeme všechna vyjádření na obecné rovnice, které upravíme tak, aby před x bylo číslo 2 (tak můžeme pokrátit obecnou rovnici v bodě a) bez toho, aby se objevily zlomky).

a) $4x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow 2x - y + 1 = 0$

b) $\begin{matrix} x = -1 + t \\ y = 1 + 2t, t \in R \end{matrix}$

Vyloučíme parametr z první rovnice: $x = -1 + t \Rightarrow t = x + 1$.

Dosadíme do druhé rovnice: $y = 1 + 2(x + 1) = 1 + 2x + 2 = 2x + 3 \Rightarrow 2x - y + 3 = 0$.

c) $\{[1-t; 1-2t], t \in R\} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 - t \\ y = 1 - 2t, t \in R \end{matrix}$

Vyloučíme parametr z první rovnice: $x = 1 - t \Rightarrow t = 1 - x$.

Dosadíme do druhé rovnice: $y = 1 - 2(1 - x) = 1 - 2 + 2x = 2x - 1 \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$.

d) $y = 2x + 1 \Rightarrow 2x - y + 1 = 0$

e) $-2x + y + 1 = 0 \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$

f) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow 2x + y = 4 \Rightarrow 2x + y - 4 = 0$

⇒ Přímký a) až e) jsou rovnoběžné. Totožné jsou pak dvě dvojice přímek: přímky a), d) a přímky c), e).

Pedagogická poznámka: Snažím se, aby si studenti uvědomili, že je velmi výhodné v situaci, kdy je sledovaných přímek poměrně dost, se pořádně rozmyslet, jaký postup je nejvhodnější. Častý problém je nepřehledný zápis, pokud studenti ze sešitu nepoznají, která upravená rovnice patří ke kterému zadání, nemají šanci příklad úspěšně vyřešit.

Př. 5: Je dán trojúhelník ABC ; $A[-1;-2]$, $B[3;-4]$, $C[5;5]$. Najdi patu výšky v_c . Najdi vyjádření výšky v_c (je myšlena přímo úsečka, ne přímka, na které v_c leží).

Patu výšky v_c je průsečík přímky AB s přímkou, na které leží výška v_c (kolmice na AB procházející bodem C).

Průsečík nejsnáze určíme, pokud je jedna z přímek vyjádřena parametricky a druhá obecnou rovnicí. Protože úsečku můžeme vyjádřit pouze parametricky, najdeme obecnou rovnici přímky AB a parametrické vyjádření přímky, na které leží v_c .

Obecná rovnice přímky AB

$$B - A = (4; -2) \Rightarrow \mathbf{u}_{AB} = (2; -1) \Rightarrow \mathbf{n}_{AB} = (1; 2) \Rightarrow \text{rovnice } x + 2y + c = 0.$$

$$\text{Dosadíme bod } A: -1 + 2(-2) + c = 0 \Rightarrow c = 5.$$

$$x + 2y + 5 = 0$$

Parametrické vyjádření přímky, na které leží v_c

Přímka je kolmá na přímkou $AB \Rightarrow \mathbf{u}_{v_c} = \mathbf{n}_{AB} = (1; 2)$. Použijeme bod $C[5;5]$.

$$\text{Přímka, na které leží } v_c: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 5 + 2t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Patu výšky v_c

$$\text{Hledáme průsečík přímek } x + 2y + 5 = 0 \text{ a } \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 5 + 2t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(5 + t) + 2(5 + 2t) + 5 = 0$$

$$5 + t + 10 + 4t + 5 = 0$$

$$5t = -20$$

$$t = -4$$

$$\text{Dopočteme patu výšky } C_0: \begin{cases} x = 5 + t = 5 + (-4) = 1 \\ y = 5 + 2t = 5 + 2(-4) = -3 \end{cases}$$

Patou výšky je bod $C_0[1; -3]$.

$$\text{Vyjádření výšky } v_c: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 5 + 2t, t \in \langle -4; 0 \rangle \end{cases}$$

Výška v_c je úsečka ohraničená body $C(t=0)$ a $C_0(t=-4)$.

Pedagogická poznámka: Opět zdůrazňuji studentům, aby si příklad dobře rozmysleli. Pokud nevyjádří přímku, na které leží výška, parametricky, najdou sice průsečík, ale vyjádření výšky (úsečky) musí spočítat celé. Při postupu použitým v řešení mají vyjádření výšky hotové prakticky ihned.

Další kámen úrazu je při vyjadřování úsečky, kde žáci automaticky píší $t \in \langle 0; 1 \rangle$, nechávám je nakreslit obrázek, který obsahuje směrový vektor, o kterém víme, že v parametrickém vyjádření $X = C + tu$ ho musíme vynásobit (-4) , abychom se z bodu C posunuli do bodu C_0 .

Shrnutí: Poznatků, které si musíme z analytické geometrie pamatovat, je překvapivě málo, pokud jsou dobře poskládané.