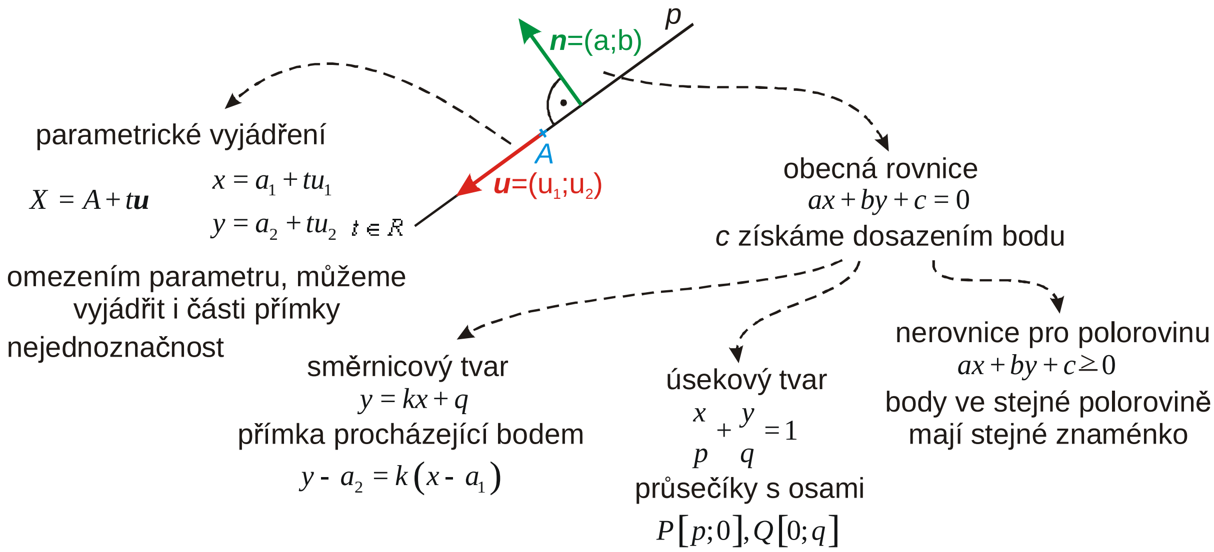
## 7.3.12 Polohové úlohy v rovině II

**Předpoklady:** 070311

**Pedagogická poznámka:** Vytvoření přehledu žáci dostávají jako dobrovolný domácí úkol na konci předchozího hodiny. Svoji verzi okomentuji s přispěním třídy napíšu na tabuli a nechám ho na ní po zbytek hodiny napsaný.

**Př. 1:** Zkus přehledně uspořádat dosud probrané poznatky z analytické geometrie. Jak spolu a se způsoby zadání přímky souvisí parametrické vyjádření přímky, její obecná rovnice, směrnicový a úsekový tvar? Se kterým z uvedených způsobů vyjádření přímky souvisí nerovnice pro polorovinu?




*x,y* - neznámé, místo pro dosazení souřadnic bodů

*a,b,c,p,q,$a_1$,$a_2$*,... - čísla, která rozlišují různé přímky od sebe navzájem

průsečíky - splňují obojí rovnice- řešení soustav

**Př. 2:** Urči vzájemnou polohu přímek $p: 2x - 3y + 1 = 0$ a $q = \{[1-6t; -2-4t], t \in R\}$.

Přímky jsou dány obecnou rovnicí a parametrickým vyjádřením $\Rightarrow$ snadno můžeme nalézt průsečíky a z jejich počtu určíme vzájemnou polohu.

$p: 2x - 3y + 1 = 0$ a $q$: $\begin{array}{l} x = 1 - 6t \\ y = -2 - 4t, t \in R \end{array}$ $\Rightarrow$ dosadíme z vyjádření $q$ do rovnice pro $p$.

$2(1-6t) - 3(-2-4t) + 1 = 0$

$2 - 12t + 6 + 12t + 1 = 0$

$9 = 0$ $\Rightarrow$ přímky $p$ a $q$ nemají společný bod $\Rightarrow$ jsou rovnoběžné.

**Pedagogická poznámka:** Studenti samozřejmě mohou postupovat i spoustou jiných způsobů. Poměrně často se stává, že si studenti, kteří vzájemnou polohu určují z vektorů, neuvědomí, že pro přímku *p* získají z rovnice normálový vektor, pro přímku *q* vektor směrový a tedy nemohou očekávat, že při rovnoběžnosti těchto přímek by jeden z těchto vektorů byl násobkem druhého.

**Př. 3:** Najdi obecnou rovnici osy úsečky *AB*; $A[-2;1]$, $B[4;-3]$.

Osa úsečky *AB* je přímka kolmá na úsečku *AB* procházející jejím středem $\Rightarrow$
$\boldsymbol{u}_{AB} = B - A = (6;-4)$ je směrový vektor přímky *AB* a tedy jeden z normálových vektorů hledané osy $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n}_{osy} = (3;-2)$ (vektor zkrátíme) $\Rightarrow$
obecná rovnice osy: $3x - 2y + c = 0$,
bod na ose $S_{AB}[1;-1]$ $\Rightarrow$ $3 \cdot 1 - 2(-1) + c = 0$ $\Rightarrow$ $c = -5$,
rovnice osy úsečky *AB*: $3x - 2y - 5 = 0$.

**Pedagogická poznámka:** Pokud jste vynechali hodinu 7307 mají studenti s příkladem obrovské problémy. Je potřeba, aby si nakreslili obrázek a ujasnili si, jaký vektor pro sestavení obecné rovnice osy hledají (z obrázku jim pak dojde, že hledaným vektorem je vektor $B - A$). Je potřeba zabránit tomu, aby se v jejich poznámkách objevily zápisy typu: $\boldsymbol{u} = B - A = (6;-4)$ $\quad$ $\boldsymbol{n} = (6;-4)$.

Není z nich jasné, že jde o vektory, které popisují dvě různé přímky a někteří studenti pak získávají pocit, že normálový vektor může být někdy shodný se směrovým.

**Př. 4:** Rozhodni, které z následujících přímek jsou totožné.

a) $4x - 2y + 2 = 0$ b) $\begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 1 + 2t, t \in R \end{aligned}$ c) $\{[1-t;1-2t], t \in R\}$

d) $y = 2x + 1$ e) $-2x + y + 1 = 0$ f) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$

Totožnost přímek snadno poznáme z obecné rovnice $\Rightarrow$ převedeme všechna vyjádření na obecné rovnice, které upravíme tak, aby před *x* bylo číslo 2 (tak můžeme pokrátit obecnou rovnici v bodě a) bez toho, aby se objevily zlomky).
a) $4x - 2y + 2 = 0$ $\Rightarrow$ $2x - y + 1 = 0$
b) $\begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= 1 + 2t, t \in R \end{aligned}$
Vyloučíme parametr z první rovnice: $x = -1 + t$ $\Rightarrow$ $t = x + 1$.
Dosadíme do druhé rovnice: $y = 1 + 2(x+1) = 1 + 2x + 2 = 2x + 3$ $\Rightarrow$ $2x - y + 3 = 0$.
c) $\{[1-t;1-2t], t \in R\}$ $\Rightarrow$ $\begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 1 - 2t, t \in R \end{aligned}$
Vyloučíme parametr z první rovnice: $x = 1 - t$ $\Rightarrow$ $t = 1 - x$.
Dosadíme do druhé rovnice: $y = 1 - 2(1-x) = 1 - 2 + 2x = 2x - 1$ $\Rightarrow$ $2x - y - 1 = 0$.
d) $y = 2x + 1$ $\Rightarrow$ $2x - y + 1 = 0$
e) $-2x + y + 1 = 0$ $\Rightarrow$ $2x - y - 1 = 0$
f) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ $\Rightarrow$ $2x + y = 4$ $\Rightarrow$ $2x + y - 4 = 0$

$\Rightarrow$ Přímky a) až e) jsou rovnoběžné. Totožné jsou pak dvě dvojice přímek: přímky a), d) a přímky c), e).

**Pedagogická poznámka:** Snažím se, aby si studenti uvědomili, že je velmi výhodné v situaci, kdy sledovaných přímek poměrně dost, se pořádně rozmyslet, jaký postup je nejvhodnější.
Častý problém je nepřehledný zápis, pokud studenti ze sešitu nepoznají, která upravená rovnice patří ke kterému zadání, nemají šanci příklad úspěšně vyřešit.

**Př. 5:** Je dán trojúhelník *ABC*; $A[-1;-2]$, $B[3;-4]$, $C[5;5]$. Najdi patu výšky $v_c$. Najdi vyjádření výšky $v_c$ (je myšlena přímo úsečka, ne přímka na které $v_c$ leží).

Pata výšky $v_c$ je průsečík přímky *AB* s přímkou, na které leží výška $v_c$ (kolmice na *AB* procházející bodem *C*).
Průsečík nejsnáze určíme, pokud je jedna z přímek vyjádřena parametricky a druhá obecnou rovnicí. Protože úsečku můžeme vyjádřit pouze parametricky najdeme obecnou rovnici přímky *AB* a parametrické vyjádření přímky, na které leží $v_c$.

**Obecná rovnice přímky *AB***

$B-A=(4;-2) \Rightarrow \boldsymbol{u}_{AB}=(2;-1) \Rightarrow \boldsymbol{n}_{AB}=(1;2) \Rightarrow$ rovnice $x+2y+c=0$.

Dosadíme bod *A*: $-1+2(-2)+c=0 \Rightarrow c=5$.

$x+2y+5=0$

**Parametrické vyjádření přímky, na které leží $v_c$**

Přímka je kolmá na přímku *AB* $\Rightarrow$ $\boldsymbol{u}_{v_c}=\boldsymbol{n}_{AB}=(1;2)$. Použijeme bod $C[5;5]$.

Přímka, na které leží $v_c$: $\begin{array}{l} x=5+t \\ y=5+2t, t\in R \end{array}$.

**Pata výšky $v_c$**

Hledáme průsečík přímek $x+2y+5=0$ a $\begin{array}{l} x=5+t \\ y=5+2t, t\in R \end{array}$.

$(5+t)+2(5+2t)+5=0$
$5+t+10+4t+5=0$
$5t=-20$
$t=-4$

Dopočteme patu výšky $C_0$: $\begin{array}{l} x=5+t=5+(-4)=1 \\ y=5+2t=5+2(-4)=-3 \end{array}$.

Patou výšky je bod $C_0[1;-3]$.

**Vyjádření výšky $v_c$:** $\begin{array}{l} x=5+t \\ y=5+2t, t\in \langle -4;0\rangle \end{array}$.

Výška $v_c$ je úsečka ohraničená body *C* ($t=0$) a $C_0$ ($t=-4$).

**Pedagogická poznámka:** Opět zdůrazňuji studentům, aby si příklad dobře rozmysleli. Pokud nevyjádří přímku, na které leží výška, parametricky, najdou sice průsečík, ale vyjádření výšky (úsečky) musí spočítat celé. Při postupu použitém v řešení mají vyjádření výšky hotové prakticky ihned.

Další kámen úrazu je při vyjadřování úsečky, kde žáci automaticky píší $t \in \langle 0;1 \rangle$, nechávám je nakreslit obrázek, který obsahuje směrový vektor, o kterém víme, že v parametrickém vyjádření $X = C + t\boldsymbol{u}$, ho musíme vynásobit $(-4)$, abychom se z bodu $C$ posunuli do body $C_0$.

**Shrnutí:** Poznatků, které si musíme z analytické geometrie pamatovat je překvapivě málo, pokud jsou dobře poskládané.