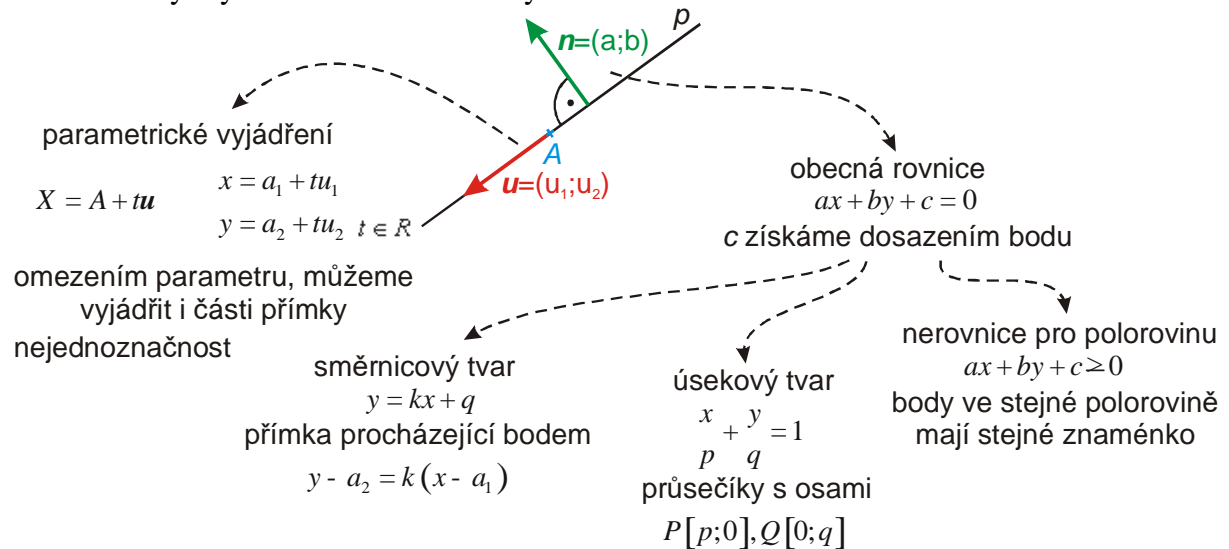


7.3.13 Polohové úlohy v rovině II

Předpoklady: 070312

Přehled analytiky z úvodu minulé hodiny



x, y - neznámé, místo pro dosazení souřadnic bodů
 $a, b, c, p, q, a_1, a_2, \dots$ - čísla, která rozlišují různé přímky od sebe navzájem
 průsečíky - splňují obojí rovnice- řešení soustav

Př. 1: Je dán trojúhelník ABC ; $A[-1; -2]$, $B[3; -3]$, $C[5; 5]$. Najdi:

- obecnou rovnici přímky, na které leží těžnice t_a ,
- parametrické vyjádření přímky, na které leží výška v_b .

a) obecnou rovnici přímky, na které leží těžnice t_a

Těžnice prochází vrcholem $A[-1; -2]$ a středem strany a , bodem S_{BC} .

Souřadnice bodu $S_{BC} \left[\frac{3+5}{2}; \frac{-3+5}{2} \right] = [4; 1]$.

Hledáme obecnou rovnici \Rightarrow potřebujeme normálový vektor.

$u_t = S_{BC} - A = (4 - (-1); 1 - (-2)) = (5; 3)$

$n_t = (3; -5) \Rightarrow$ obecná rovnice $3x - 5y + c = 0$.

Dosadíme $S_{BC} [4; 1]$: $3 \cdot 4 - 5 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = -7$

Rovnice přímky, na které leží těžnice t_a : $3x - 5y - 7 = 0$

b) parametrické vyjádření přímky, na které leží výška v_b

Výška v_b je přímka kolmá na stranu AC , procházející bodem B .

$u_{AC} = C - A = (5 - (-1); 5 - (-2)) = (6; 7)$

Směrový vektor přímky v_b je kolmý na přímku $AC \Rightarrow \mathbf{u}_v = (7; -6)$

Parametrické vyjádření přímky $v_b: X = B + t\mathbf{u}_v$

$$\begin{aligned}x &= 3 + 7t \\ y &= -3 - 6t; t \in R\end{aligned}$$

Př. 2: Napiš pomocí parametru všechny přímky, které procházejí bodem $B[-2; 3]$ a s osou x svírají kladný úhel větší než 45° .

Zapisujeme přímky procházející daným bodem \Rightarrow směrnicový tvar $y - a_2 = k(x - a_1)$.

Dosadíme bod $B[-2; 3]: y - 3 = k(x - [-2])$.

Zbývá určit hodnoty směrnice k : kladný úhel větší než 45° ($\varphi > 45^\circ$) $\Rightarrow k = \operatorname{tg} \varphi > 1 \Rightarrow k \in (1; \infty) \Rightarrow$ hledané přímky můžeme zapsat: $y - 3 = k(x + 2), k \in (1; \infty)$.

Př. 3: Urči všechny hodnoty parametru m , pro které jsou přímky $p: mx + 6y - 2m = 0$ a $q: 2x + my + 1 = 0$ a) navzájem kolmé; b) rovnoběžné.

a) přímky jsou navzájem kolmé

Přímky jsou navzájem kolmé, právě když jsou navzájem kolmé jejich normálové vektory a tedy je nulový jejich skalární součin.

$\mathbf{n}_p = (m; 6 - 2m), \mathbf{n}_q = (2; m)$ a platí $\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{n}_q = 0$.

Dosadíme: $\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{n}_q = (m; 6 - 2m) \cdot (2; m) = 2m + 6m - 2m^2 = 0$.

$$8m - 2m^2 = 0$$

$$m(4 - m) = 0 \Rightarrow m_1 = 0, m_2 = 4$$

b) přímky jsou navzájem rovnoběžné

Přímky jsou navzájem rovnoběžné, když jejich normálové vektory jsou svými násobky.

$\mathbf{n}_p = (m; 6 - 2m), \mathbf{n}_q = (2; m)$ a platí $\mathbf{n}_p = k \cdot \mathbf{n}_q$.

Dosadíme: $\mathbf{n}_p = k \cdot \mathbf{n}_q \Rightarrow (m; 6 - 2m) = k(2; m)$.

$$\begin{aligned}\text{Soustava rovnic:} & \quad m = 2k \\ & \quad 6 - 2m = km\end{aligned}$$

Z první rovnice dosadíme do druhé: $6 - 2 \cdot 2k = k \cdot 2k \quad /: 2$.

$$3 - 2k = k^2$$

$$k^2 + 2k - 3 = 0$$

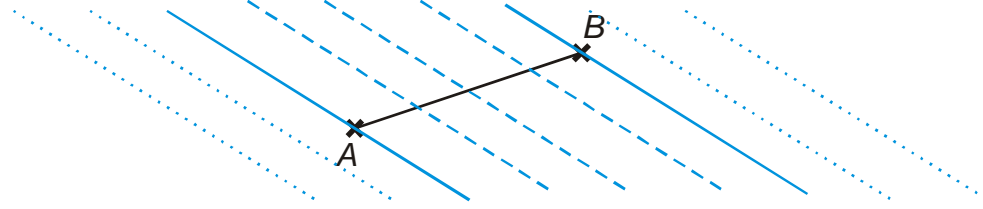
$$(k + 3)(k - 1) = 0$$

$$k_1 = -3 \Rightarrow m_1 = 2k = 2 \cdot (-3) = -6 \quad k_2 = 1 \Rightarrow m_2 = 2k = 2 \cdot 1 = 2$$

Pedagogická poznámka: Pro mnohé žáky je problémem zapsat si souřadnice normálového vektoru přímky p . Někteří dokonce bojují s tím, jestli je to rovnice přímky, když je tam y dvakrát. Většinou stačí poradit, aby si y vytkli.

Př. 4: Najdi všechny hodnoty parametru c , pro které se přímky $2x + y + c = 0$ protíná s úsečkou AB , $A[-1;5]$, $B[2;1]$.

Hodnota parametru c ovlivňuje posunutí přímky ve svislém (vodorovném) směru nemění její směr \Rightarrow všechny takto zapsané přímky jsou rovnoběžky. Nakreslíme si obrázek.



Z obrázku vidíme, že pro dvě hodnoty parametru c_A , c_B se přímky prochází krajními body A , B , pro hodnoty parametru v intervalu $\langle c_A; c_B \rangle$ pak přímky prochází vnitřními body úsečky AB .

Dosadíme do rovnice přímky bod $A[-1;5]$: $2(-1) + 5 + c_A = 0 \Rightarrow c_A = -3$.

Dosadíme do rovnice přímky bod $B[2;1]$: $2 \cdot 2 + 1 + c_B = 0 \Rightarrow c_B = -5$.

Přímka $2x + y + c = 0$ se protíná s úsečkou AB pro hodnoty parametru $c \in \langle -5; -3 \rangle$.

Př. 5: Najdi přímku, která prochází bodem $A[2;3]$ a platí pro ní, že její průsečík s osou x je od počátku soustavy souřadnic dvakrát vzdálenější než průsečík s osou y .

Zajímáme se o průsečíky s osami \Rightarrow použijeme úsekový tvar $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

Průsečík s osou x : $P[p;0] \Rightarrow$ průsečík s osou y : $Q\left[0; \pm \frac{p}{2}\right]$ (aby vzdálenost od počátku byla poloviční než u průsečíku s osou x) \Rightarrow pokračujeme ve dvou sloupcích.

$$q = \frac{p}{2}$$

$$q = -\frac{p}{2}$$

Dosadíme do rovnice přímky.

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{\frac{p}{2}} = \frac{x}{p} + \frac{2y}{p} = 1$$

$$\frac{x}{p} - \frac{y}{\frac{p}{2}} = \frac{x}{p} - \frac{2y}{p} = 1$$

Rovnici přímky musí vyhovovat bod $A[2;3]$.

$$\begin{aligned} \frac{2}{p} + \frac{2 \cdot 3}{p} &= 1 & / \cdot p \\ 2 + 6 &= p \\ p &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{p} - \frac{2 \cdot 3}{p} &= 1 & / \cdot p \\ 2 - 6 &= p \\ p &= -4 \end{aligned}$$

Přímka: $\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$, průsečíky: $P[8;0]$,
 $Q[0;4]$.

Přímka: $-\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$, průsečíky: $P[-4;0]$,
 $Q[0;2]$.

Př. 6: Jsou dány dvě přímky: jedna je zadána obecnou rovnicí, druhá parametricky. Rozhodni co nejrychleji, bez určení průsečíků, zda jsou rovnoběžné (případně

totožné) nebo různoběžné. Navržený postup ověř na přímkách z příkladu 2,
 $p: 2x - 3y + 1 = 0$ a $q = \{[1 - 6t; -2 - 4t], t \in R\}$.

Dvě přímky jsou rovnoběžné (nebo totožné) pokud mají stejný směr. Pokud je jedna z přímek dána obecnou rovnicí, musí být její normálový vektor kolmý na směrový vektor druhé přímky (aby byl jejím normálovým vektorem také) \Rightarrow skalární součin normálového vektoru jedné a směrového vektoru druhé přímky musí být nulový.

$$p: 2x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow \mathbf{n}_p = (2; -3)$$

$$q = \{[1 - 6t; -2 - 4t], t \in R\} \Rightarrow \mathbf{u}_q = (-6; -4)$$

$\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{u}_q = (2; -3) \cdot (-6; -4) = 2 \cdot (-6) + (-3) \cdot (-4) = 0 \Rightarrow$ přímky p, q jsou rovnoběžné nebo totožné (jak už víme z příkladu 2).

Př. 7: Je dán trojúhelník ABC , $A[-3;1]$, $B[3;-2]$, $C[1;4]$. Rozhodni, zda bod $D[-2;2]$ leží uvnitř trojúhelníku ABC . Pokud bod D uvnitř trojúhelníku ABC neleží, rozhodni, ve které z částí roviny rozdělené stranami trojúhelníku bod D leží.

Bod D leží uvnitř trojúhelníka, právě když leží:

- vzhledem k přímce AB ve stejné polorovině jako bod C ,
- vzhledem k přímce BC ve stejné polorovině jako bod A ,
- vzhledem k přímce AC ve stejné polorovině jako bod B .

V případě, že bod D nebude ležet uvnitř trojúhelníku, můžeme z předchozích nerovností určit jeho polohu v rovině.

Leží bod D vzhledem k přímce AB ve stejné polorovině jako bod C ?

Rovnice přímky AB : $B - A = (6; -3) \Rightarrow (2; -1) \Rightarrow \mathbf{n}_{AB} = (1; 2) \Rightarrow$ rovnice $x + 2y + c = 0$,

dosadíme bod $A[-3;1]$: $(-3) + 2 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow$ rovnice $x + 2y + 1 = 0$.

- Bod $C[1;4]$: $x + 2y + 1 = 1 + 2 \cdot 4 + 1 = 10$,
- bod $D[-2;2]$: $x + 2y + 1 = (-2) + 2 \cdot 2 + 1 = 3$,

\Rightarrow bod D leží vzhledem k přímce AB ve stejné polorovině jako bod C .

Leží bod D vzhledem k přímce BC ve stejné polorovině jako bod A ?

Rovnice přímky BC : $C - B = (-2; 6) \Rightarrow (-1; 3) \Rightarrow \mathbf{n}_{BC} = (3; 1) \Rightarrow$ rovnice $3x + y + c = 0$,

dosadíme bod $B[3;-2]$: $3 \cdot 3 + (-2) + c = 0 \Rightarrow c = -7 \Rightarrow$ rovnice $3x + y - 7 = 0$.

- Bod $A[-3;1]$: $3x + y - 7 = 3(-3) + 1 - 7 = -15$,
- bod $D[-2;2]$: $3x + y - 7 = 3(-2) + 2 - 7 = -11$,

\Rightarrow bod D leží vzhledem k přímce BC ve stejné polorovině jako bod A .

Leží bod D vzhledem k přímce AC ve stejné polorovině jako bod B ?

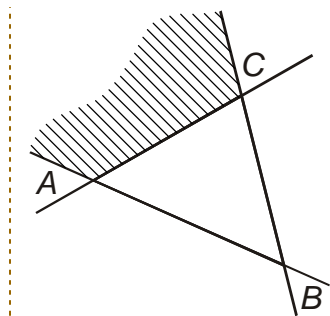
Rovnice přímky AC : $C - A = (4; 3) \Rightarrow \mathbf{n}_{AC} = (3; -4) \Rightarrow$ rovnice $3x - 4y + c = 0$, dosadíme bod

$A[-3;1]$: $3(-3) - 4 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = 13 \Rightarrow$ rovnice $3x - 4y + 13 = 0$.

- Bod $B[3;-2]$: $3x - 4y + 13 = 3 \cdot 3 - 4 \cdot (-2) + 13 = 14$,
- bod $D[-2;2]$: $3x - 4y + 13 = 3 \cdot (-2) - 4 \cdot 2 + 13 = -1$,

\Rightarrow bod D leží vzhledem k přímce AC v opačné polorovině než bod B .

Bod D neleží uvnitř trojúhelníka ABC , leží v oblasti vyznačené na obrázku.



Shrnutí: Poznatků, které si musíme z analytické geometrie pamatovat je překvapivě málo, pokud jsou dobře poskládané.