7.3.13 Vzdálenost bodu od přímky II

Předpoklady: 7312

Pedagogická poznámka: Průběh hodiny hodně závisí na tom, jak odolní jsou studenti v dosazování do vzorců, které je nejtěžší částí hodiny. Dalším problémem pak mohou být rovnice s absolutní hodnotou.

Pedagogická poznámka: Následující příklad navazuje na poslední příklad minulé hodiny. Snažím se, aby si studenti ujasnili, co je stejné, co je jinak a podle toho se zařídili.

Pedagogická poznámka: Následující příklad počítáme pouze analytickým přístupem (druhá varianta), konstrukční přístup je uveden pouze pro demonstraci. Body na přímce najdeme dva, v každé lavici tak vznikne dvojice, která se snaží dojít k výsledku dvěma (trošku) různými způsoby.

Př. 1: Najdi přímku, která je rovnoběžná s přímkou $p: x-3y+2=0$ a je od ní vzdálena $\sqrt{10}$.

Dva způsoby řešení.

Konstrukční přístup: Hledaná přímka je rovnoběžná $\Rightarrow$ rovnice $x-3y+c=0$ $\Rightarrow$ potřebujeme najít bod, přes který přímka prochází $\Rightarrow$ hledáme bod vzdálený od přímky $x-3y+2=0$ o $\sqrt{10}$ $\Rightarrow$ takových bodů je nekonečně mnoho $\Rightarrow$ musíme omezit výběr, například budeme hledat pouze body na ose *y*.

Analytický přístup: Hledaná přímka je rovnoběžná $\Rightarrow$ rovnice $x-3y+c=0$ hledáme podmínku, kterou přímka splňuje a která nám určí parametr *c*. Hledaná přímka je vzdálena od přímky $x-3y+2=0$ o $\sqrt{10}$ $\Rightarrow$ je vzdálena od libovolného bodu přímky $x-3y+2=0$ o $\sqrt{10}$.

Hledáme bod na přímce $p: x-3y+2=0$: jednu souřadnici zvolíme, druhou dopočítáme. Volíme souřadnici *y* (u *x* je číslo 1 $\Rightarrow$ při dopočítávání souřadnice se nemusí dělit), nekonečně mnoho možností.

- $y=0 \Rightarrow x-3\cdot 0+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow P_1[-2;0]$,
- $y=1 \Rightarrow x-3\cdot 1+2=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow P_2[1;1]$.

Hledaná přímka $x-3y+c=0$ je od nalezeného bodu vzdálena o $\sqrt{10}$.

Bod $P_1[-2;0]$, přímka $x-3y+c=0$.

$$d=\frac{|ap_1+bp_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|1\cdot(-2)-3\cdot 0+c|}{\sqrt{1+(-3)^2}}=\sqrt{10}$$

$$\frac{|-2+c|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10} \quad \cdot/\sqrt{10}$$

$|c-2|=10$ $\Rightarrow$ hledáme čísla, jejichž obraz je od obrazu čísla 2 vzdálený o 10 $\Rightarrow$ $c_1=12$, $c_2=-8$.

Bod $P_2[1;1]$, přímka $x-3y+c=0$.

$$d=\frac{|ap_1+bp_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|1\cdot 1-3\cdot 1+c|}{\sqrt{1+(-3)^2}}=\sqrt{10}$$

$$\frac{|-2+c|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10} \quad \cdot/\sqrt{10}$$

$|c-2|=10$ $\Rightarrow$ hledáme čísla, jejichž obraz je od obrazu čísla 2 vzdálený o 10 $\Rightarrow$ $c_1=12$, $c_2=-8$.

V rovině existují ve vzdálenosti $\sqrt{10}$ dvě přímky rovnoběžné s přímkou $p: x-3y+2=0$: $q_1: x-3y+12=0$, $q_2: x-3y-8=0$.

Ke stejnému výsledku bychom dospěli i konstrukčním přístupem.
Bod na ose *y*: $A\left[0;a_y\right]$. Dosadíme do vzorce pro vzdálenost:

$$d=\frac{|ap_1+bp_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|1\cdot 0-3\cdot a_y+2|}{\sqrt{1+(-3)^2}}=\sqrt{10}.$$

$$\frac{|-3a_y+2|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$ Použijeme $|-3a_y+2|=|3a_y-2|$.

$$|3a_y-2|=10$$

Rovnice s absolutní hodnotou $\Rightarrow$ dělíme na intervaly: $3a_y-2=0 \Rightarrow a_y=\frac{2}{3}$.

$a_y\in\left(-\infty;\frac{2}{3}\right\rangle \Rightarrow$	$a_y\in\left\langle\frac{2}{3};\infty\right) \Rightarrow$
$3a_y-2\le 0 \Rightarrow |3a_y-2|=-3a_y+2$	$3a_y-2\ge 0 \Rightarrow |3a_y-2|=3a_y-2$
$-3a_y+2=10$	$3a_y-2=10$
$3a_y=-8$	$3a_y=12$
$a_y=-\frac{8}{3}$	$a_y=4$

$\Rightarrow$ Dva body, které splňují podmínky.

$A_1[0;4]$
Dosadíme do rovnice:
$x-3y+c=x-3\cdot 4+c=0\Rightarrow c=12$.
$x-3y+12=0$

$A_2\left[0;-\frac{8}{3}\right]$
Dosadíme do rovnice:
$x-3y+c=x-3\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)+c=0\Rightarrow c=-8$.
$x-3y-8=0$

Pedagogická poznámka: U konstrukčního přístupu velká část žáků potřebuje diskusi o roli bodu *A* v řešení příkladu. Jde o to, aby si uvědomili, že bod *A* je pouze pomocným cílem k nalezení rovnic přímky a že si ho můžeme volit libovolně. Nic nám tedy nebrání si ho zvolit co nejjednodušeji.

Př. 2: Na přímce $x+3y-1=0$ najdi bod, který je od přímky $2x+y-7=0$ vzdálen $2\sqrt{5}$.

Souřadnice bodu $A\left[a_x;a_y\right] \Rightarrow$ na určení dvou neznámých potřebujeme dvě rovnice.

- Bod *A* leží na přímce $x+3y-1=0$ $\Rightarrow$ vyhovuje její rovnici $\Rightarrow$ $a_x+3\cdot a_y-1=0$.
- Bod *A* je od přímky $2x+y-7=0$ vzdálen $2\sqrt{5}$:
  $$d=\frac{|ap_1+bp_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2\cdot a_x+a_y-7|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\sqrt{5}.$$

Z první rovnice $a_x+3\cdot a_y-1=0$ dosadíme do druhé $a_x=1-3a_y$.

$$\frac{\left|2\cdot\left(1-3a_y\right)+a_y-7\right|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5} \quad /\cdot\sqrt{5}$$

$$\left|2-6a_y+a_y-7\right|=10$$

$$\left|-5a_y-5\right|=10$$

$$|-5|\left|a_y+1\right|=10$$

$\left|a_y-(-1)\right|=2 \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od –1 o dva.

- $a_{y1}=1 \Rightarrow a_x=1-3a_y=1-3\cdot 1=-2 \Rightarrow A_1[-2;1]$
- $a_{y2}=-3 \Rightarrow a_x=1-3a_y=1-3\cdot(-3)=10 \Rightarrow A_2[10;-3]$

Řešením příkladu je dvojice bodů $A_1[-2;1]$ a $A_2[10;-3]$.

Pedagogická poznámka: Nejdůležitějším místem příkladu je sestavení rovnic. Napíšeme podmínky na tabuli slovně, ale sestavení rovnic musí nejdříve provést samostatně žáci.
Orientaci v příkladu může zlepšit pojmenování přímek. Žákům to nezakazuji, ale ani to za ně nedělám.

Př. 3: Sestav soustavu rovnic v předchozím příkladu, pokud si jako hledaný bod zvolíme bod $B[x;y]$.

Souřadnice bodu $B[x;y] \Rightarrow$ na určení dvou neznámých potřebujeme dvě rovnice.

- Bod *B* leží na přímce $x+3y-1=0 \Rightarrow$ vyhovuje její rovnici $x+3y-1=0$.
- Bod *A* je od přímky $2x+y-7=0$ vzdálen $2\sqrt{5}$:
  $$d=\frac{\left|ap_1+bp_2+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\left|2\cdot x+y-7\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\sqrt{5}.$$

Použití bodu $B[x;y]$ je rychlejší, ale vyžaduje lepší orientaci v dosazování do rovnic.

Pedagogická poznámka: Pro některé studenty je předchozí dosazení opravdu oříšek, zejména fakt v první podmínce, kdy po dosazení zůstane rovnice beze změny.

Př. 4: Jsou dány dvě rovnoběžné přímky $x-2y+6=0$ a $2x-4y-5=0$. Najdi přímku, která je s nimi rovnoběžná a má od obou stejnou vzdálenost.

Příklad je možné řešit dvěma způsoby: analyticky a napodobením konstrukce.
Analytické řešení:
Hledaná přímka je rovnoběžná s přímkou $2x-4y-5=0 \Rightarrow$ je popsána rovnicí $2x-4y+c=0$. Koeficient *c* určíme pomocí libovolného bodu na této přímce. Zvolíme si například bod s nulovou *x*-ovou souřadnicí: $2\cdot 0-4y+c=0 \Rightarrow y=\frac{c}{4}$.

Bod $\left[0;\frac{c}{4}\right]$ je stejně vzdálen od přímek $x-2y+6=0$ a $2x-4y-5=0$.

$$\frac{\left|0-2\cdot\frac{c}{4}+6\right|}{\sqrt{1+(-2)^2}}=\frac{\left|2\cdot 0-4\cdot\frac{c}{4}-5\right|}{\sqrt{2+(-4)^2}} \Rightarrow \frac{\left|-\frac{c}{2}+6\right|}{\sqrt{5}}=\frac{|-c-5|}{\sqrt{20}} \quad /\cdot 2\sqrt{5}$$

$$2|-1|\left|\frac{c}{2}-6\right|=|-1||c+5|$$

$|c-12|=|c+5| \Rightarrow$ řešíme po intervalech:

- $c\in(-\infty;-5) \Rightarrow -c+12=-c-5 \Rightarrow 17=0 \Rightarrow K=\emptyset$
- $c\in\langle -5;12) \Rightarrow -c+12=c+5 \Rightarrow 2c=\frac{7}{2} \Rightarrow c=\frac{7}{2}$
- $c\in\langle 12;\infty) \Rightarrow c-12=c+5 \Rightarrow -17=0 \Rightarrow K=\emptyset$

Hledanou přímkou je přímka $2x-4y+\frac{7}{2}=0$.

Konstrukční řešení:
Rovnoběžku, která je osou pásu můžeme vést středem libovolné úsečky, která má krajní body na přímkách $x-2y+6=0$ a $2x-4y-5=0$.

- Průsečík přímky $x-2y+6=0$ s osou *y*: $0-2y+6=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow$ bod $A[0;3]$.
- Průsečík přímky $2x-4y-5=0$ s osou *y*: $2\cdot 0-4y-5=0 \Rightarrow y=-\frac{5}{4} \Rightarrow$ bod $B\left[0;-\frac{5}{4}\right]$.

$3+\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{12-5}{4}=\frac{7}{4} \Rightarrow$ střed úsečky *AB*: $S_{AB}\left[0;\frac{7}{8}\right]$.

Rovnice rovnoběžky: $2x-4y+c=0$, dosadíme bod $S_{AB}\left[0;\frac{7}{8}\right]$: $2\cdot 0-4\cdot\frac{7}{8}+c=0 \Rightarrow c=\frac{7}{2}$

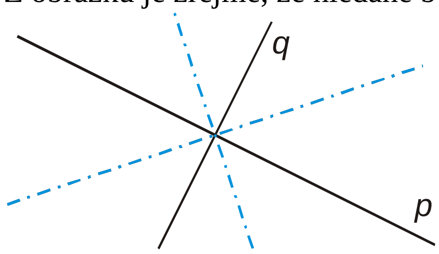
Osou pásu je přímka $2x-4y+\frac{7}{2}=0$.

Pedagogická poznámka: Studenti mají tendenci udělat průměr z koeficientů *c* v obou rovnicích, což je možné pouze v případě, že jsou obě rovnice postavené na stejném normálovém vektoru. V takovém případě, jde samozřejmě o řešení nejrychlejší:

$$2x-4y+12=0,\ 2x-4y-5=0 \Rightarrow c=\frac{12+(-5)}{2}=\frac{7}{2}.$$

Př. 5: Najdi všechny body roviny, které mají stejnou vzdálenost od přímek $p: x+2y-3=0$ a $q: 2x-y-1=0$.

Z obrázku je zřejmé, že hledané body tvoří dvě přímky – osy obou úhlů, které přímky svírají.



Zkusíme najít tyto přímky pomocí podmínky ze zadání.
Hledáme body $X[x;y]$.

- Vzdálenost bodu $X[x;y]$ od přímky $p: x+2y-3=0$: $\frac{|x+2y-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}$.
- Vzdálenost bodu $X[x;y]$ od přímky $q: 2x-y-1=0$: $\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}$.

Obě vzdálenosti se rovnají: $\frac{|x+2y-3|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x-y-1|}{\sqrt{5}} \quad / : \sqrt{5}$.

$|x+2y-3| = |2x-y-1| \Rightarrow$ musíme odstranit absolutní hodnoty. Dvě možnosti:

- umocnění: $(x+2y-3)^2 = (2x-y-1)^2$ - získáme strašné výrazy na obou stranách, ověřování si ušetříme, obě strany byly před umocněním kladné,
- odstranění absolutní hodnoty: výhodnější nepřibudou nám druhé mocniny.

Jak zjistíme, kdy odstranit absolutní hodnoty, výrazy uvnitř jsou složité. Jsou jen čtyři možnosti, které rovnou vyzkoušíme:

- oba výrazy záporné: $|x+2y-3| = |2x-y-1| \Rightarrow -(x+2y-3) = -(2x-y-1)$
  $-x-2y+3 = -2x+y+1$
  $x-3y+2=0$
- oba výrazy kladné: $|x+2y-3| = |2x-y-1| \Rightarrow x+2y-3 = 2x-y-1$
  $x-3y+2=0$ (stejná přímka jako v předchozím případě)
- levý výraz kladný, pravý záporný: $|x+2y-3| = |2x-y-1| \Rightarrow$
  $x+2y-3 = -(2x-y-1)$
  $x+2y-3 = -2x+y+1$
  $3x+y-4=0$
- levý výraz záporný, pravý kladný: $|x+2y-3| = |2x-y-1| \Rightarrow$
  $-(x+2y-3) = 2x-y-1$
  $-x-2y+3 = 2x-y-1$
  $3x+y-4=0$ (stejná přímka jako v předchozím případě)

Množinu všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od přímek $p: x+2y-3=0$ a $q: 2x-y-1=0$ tvoří dvojice přímek $x-3y+2=0$ a $3x+y-4=0$.

Př. 6: Petáková:
strana 109/cvičení 65
strana 109/cvičení 66
strana 109/cvičení 68
strana 109/cvičení 74

Shrnutí: