7.3.14 Odchylka přímek

Předpoklady: 7208, 7306

Pedagogická poznámka: Pokud chcete hladký průběh začátku hodiny, je lepší dopředu upozornit žáky, že budou potřebovat vzorec pro úhel dvou vektorů.

Př. 1: Urči úhel, který svírají vektory $\boldsymbol{u}=(-1;2)$, $\boldsymbol{v}=(3;4)$.

Využijeme vlastnosti skalárního součinu: $\cos\varphi=\dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|}$.

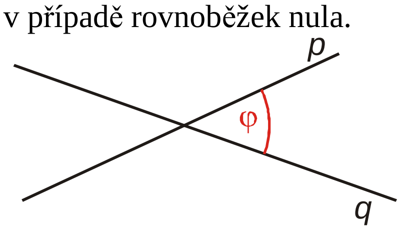
Velikosti vektorů: $|\boldsymbol{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$, $|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$.

Dosadíme do vzorce: $\cos\varphi=\dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|}=\dfrac{(-1;2)(3;4)}{\sqrt{5}\cdot5}=\dfrac{-1\cdot3+2\cdot4}{5\sqrt{5}}=\dfrac{5}{5\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow\varphi=63°26'$.

Př. 2: Zopakuj a porovnej definici a možné hodnoty:
a) planimetricky zavedené odchylky přímek,
b) úhlu vektorů zavedeného v analytické geometrii.
Na základě porovnání navrhni postup pro výpočet odchylky přímek v analytické geometrii.

Planimetrická odchylka přímek

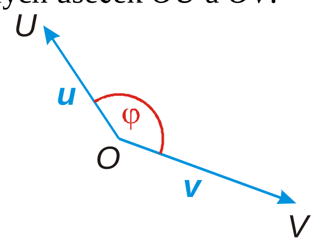
- V případě různoběžek velikost ostrého nebo pravého úhlu,
- v případě rovnoběžek nula.



$\varphi\in\langle 0;90\rangle$

Úhel vektorů

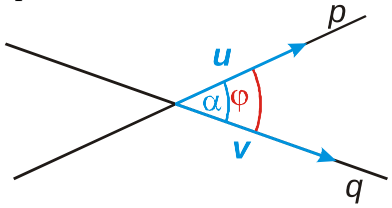
Velikost konvexního úhlu *UOV*, který vznikne z umístění vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ do orientovaných úseček *OU* a *OV*.



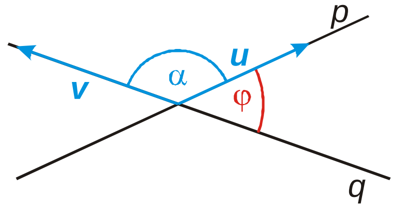
$\varphi\in\langle 0;180\rangle$ $\quad\cos\varphi=\dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$

- Skalární součin vektorů umožňuje snadno určit úhel, který vektory svírají.
- Směr přímek je určen pomocí směrových vektorů.

$\Rightarrow$ Můžeme využít skalární součin směrových vektorů na výpočet odchylky přímek. Jak to dopadne?



Odchylka přímek se rovná úhlu směrových vektorů.



Pro odchylku přímek platí: $\varphi=180°-\alpha$.

Možná řešení:

- Když vyjde tupý úhel, obrátíme jeden z vektorů.
- Když vyjde tupý úhel, dopočítáme odchylku do $180°$.
- Zamezíme hodnotám nad $90°$. Pro tyto hodnoty platí $\cos\varphi < 0$. $\Rightarrow$ Zabráníme tomu, aby byla hodnota zlomku záporná $\Rightarrow$ čitatel zlomku dáme do absolutní hodnoty (tím zároveň zabráníme tomu, aby odchylka závisela na orientaci směrového vektoru, protože pro opačný vektor získáme opačnou hodnotu skalárního součinu se stejnou absolutní hodnotou).

Odchylka přímek *p*, *q* se směrovými vektory ***u***, ***v*** je číslo $\varphi \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, pro které platí $\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$.

Př. 3: Urči odchylku přímek *p*, *q*: $p: \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t, t \in R \end{array}$, $q = \{[2-t; 3+t], t \in R\}$.

Potřebujeme směrové vektory:

p: $\boldsymbol{u} = (2;-3) \Rightarrow |\boldsymbol{u}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$ $\qquad$ q: $\boldsymbol{v} = (-1;1) \Rightarrow |\boldsymbol{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

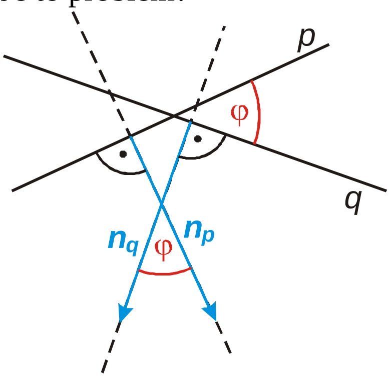
$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = (2;-3)\cdot(-1;1) = -2 - 3 = -5$

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{|-5|}{\sqrt{13}\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{13}\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 11°19'$$

Odchylka přímek *p*, *q* je $\varphi = 11°19'$.

Př. 4: Urči odchylku přímek $p: 2x - y + 3 = 0$ a $q: 3x + 2y - 1 = 0$.

Obě přímky jsou zadány obecnou rovnicí $\Rightarrow$ známe normálové vektory.
Je to problém?



Nemusíme je převádět na směrové vektory, protože odchylka přímek *p* a *q*, je stejná jako odchylka přímek, které jsou na ně kolmé (a které mají za směrové vektory normálové vektory přímek *p* a *q*).

$\boldsymbol{n}_p = (2;-1) \Rightarrow |\boldsymbol{n}_p| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ $\qquad$ $\boldsymbol{n}_q = (3;2) \Rightarrow |\boldsymbol{n}_q| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

$\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{n}_q = (2;-1)\cdot(3;2) = 6 - 2 = 4$

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{n}_q|}{|\boldsymbol{n}_p||\boldsymbol{n}_q|} = \frac{|4|}{\sqrt{5}\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{13}} \Rightarrow \varphi = 60°15'$$

Odchylka přímek *p*, *q* je $\varphi = 60°15'$.

Př. 5: Urči odchylku přímek *AB* a *p*. $A[-3;1]$, $B[1;2]$, $p: 2x - y + 3 = 0$.

Pro určení odchylky přímek můžeme požít dvojici směrových nebo normálových vektorů $\Rightarrow$ z normálového vektoru přímky *p* vypočteme její směrový vektor.

$\boldsymbol{u}_{AB} = B - A = (4;1) \Rightarrow |\boldsymbol{u}_{AB}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

$\boldsymbol{n}_p = (2;-1) \Rightarrow \boldsymbol{u}_p = (1;2) \Rightarrow |\boldsymbol{u}_p| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\boldsymbol{u}_{AB} \cdot \boldsymbol{u}_p = (4;1)\cdot(1;2) = 4 + 2 = 6$

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{u}_{AB} \cdot \boldsymbol{u}_p|}{|\boldsymbol{u}_{AB}||\boldsymbol{u}_p|} = \frac{|6|}{\sqrt{17}\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{17}\sqrt{5}} \Rightarrow \varphi = 49°24'$$

Odchylka přímek *AB* a *p* je $\varphi = 49°24'$.

Př. 6: Je dána přímka $p: x - 3y - 2 = 0$. Najdi přímku *q*, která prochází bodem $Q[1;1]$, jejíž odchylka od přímky *p* je $45°$.

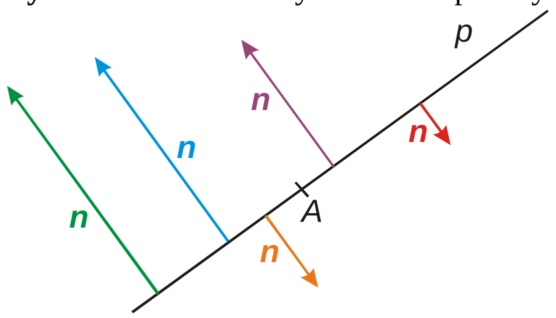
Hledáme přímku $\Rightarrow$ potřebujeme bod (máme ze zadání) a vektor (jedno zda směrový nebo normálový).
U přímky *p* známe normálový vektor $\Rightarrow$ pro přímku *q* hledáme také normálový vektor $\boldsymbol{n}_q = (a;b)$.

$\boldsymbol{n}_p = (1;-3) \Rightarrow |\boldsymbol{n}_p| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$, $\boldsymbol{n}_q = (a;b) \Rightarrow |\boldsymbol{n}_q| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{n}_q = (1;-3)\cdot(a;b) = a + (-3)b = a - 3b$

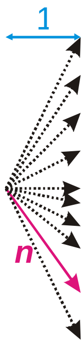
Dosazení do vzorce pro odchylku přímek: $\cos\varphi = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{n}_q|}{|\boldsymbol{n}_p||\boldsymbol{n}_q|} = \frac{|a-3b|}{\sqrt{10}\sqrt{a^2+b^2}}$.

Problém: Máme jedinou rovnici, ale dvě neznámé, zadání neobsahuje žádný další údaj pro zapsání další rovnice.
Vysvětlení: Normálových vektorů přímky *q* je nekonečně mnoho:



$\Rightarrow$ musíme si vybrat, který z nich chceme spočítat, abychom získali jednoznačný výsledek (všechny jsou stejně použitelné, ale pokud chceme konkrétní řešení, musíme si jeden vybrat).

Vybereme například takový, který má x-ovou souřadnici rovnou jedné (pokud nejsou normálové vektory svislé $\boldsymbol{n} = (0; k)$ určitě je jeden z vektorů s x-ovou souřadnicí rovnou jedné normálovým vektorem přímky p).



$\Rightarrow$ Volíme: $\boldsymbol{n}_q = (1; b) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1-3b|}{\sqrt{10}\sqrt{1^2+b^2}}$.

$\sqrt{2}\sqrt{10}\sqrt{1+b^2} = 2|1-3b|$

$2\sqrt{5}\sqrt{1+b^2} = 2|1-3b|$

$\sqrt{5(1+b^2)} = |1-3b| \quad /^2$ (Umocněním se zbavíme odmocniny i absolutní hodnoty.)

$5(1+b^2) = (1-3b)^2$

$5+5b^2 = 1-6b+9b^2$

$4b^2-6b-4=0$

$2b^2-3b-2=0$

$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2} = \frac{3\pm 5}{4}$

$x_1 = \frac{3+5}{4} = 2 \Rightarrow \boldsymbol{n}_{q1} = (1; 2)$

$b_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{n}_{q2} = (1; -0,5) \Rightarrow \boldsymbol{n}_{q2} = (2; -1)$

$\Rightarrow$ Existují dvě přímky, které splňují zadání.

q_1:

$\boldsymbol{n}_{q1} = (1; 2) \Rightarrow x+2y+c=0$

Dosadíme $Q[1;1] \Rightarrow 1+2\cdot 1+c=0 \Rightarrow$

$c=-3$.

$q_1: x+2y-3=0$

q_2:

$\boldsymbol{n}_{q2} = (2; -1) \Rightarrow 2x-y+c=0$

Dosadíme $Q[1;1] \Rightarrow 2\cdot 1-1\cdot 1+c=0 \Rightarrow$

$c=-1$.

$q_2: 2x-y-1=0$

Zadání příkladu splňují přímky $q_1: x+2y-3=0$ a $q_2: 2x-y-1=0$.

Pedagogická poznámka: Diskuse o zvolení jedné souřadnice normálového vektoru $\boldsymbol{n}_q = (1; y)$ je důležitá. Podobných případů, kdy musíme spočítat něco nejednoznačného (například směrové vektory), je mnoho a je dobré, když studenti chápou důvod, proč je nutné souřadnici zvolit.

Dodatek: Můžeme si ukázat, jak by řešení příkladu probíhalo, kdybychom si vybrali jiný směrový vektor:

Volíme: $\boldsymbol{n}_q = (2; y) \Rightarrow |\boldsymbol{n}_q| = \sqrt{2^2+y^2}$, $\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{n}_q = (1; -3)\cdot(2; y) = 2-3y$

$$\cos\varphi = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{n}_q|}{|\boldsymbol{n}_p||\boldsymbol{n}_q|} = \frac{|2-3y|}{\sqrt{10}\sqrt{4+y^2}}$$

$\sqrt{2}\sqrt{10}\sqrt{4+y^2} = 2|2-3y|$

$5(4+y^2) = (2-3y)^2 \Rightarrow 20+5y^2 = 4-12y+9y^2 \Rightarrow 4y^2-12y-16=0$

$y^2-3y-4=0 \Rightarrow (y-4)(y+1)=0 \Rightarrow$

$y_1 = 4$, $\boldsymbol{n}_{q1} = (1;2)$ nebo $y_2 = -1$, $\boldsymbol{n}_{q2} = (2;-1)$

Můžeme také zvolit *y*-ovou souřadnici a dopočítat *x*-ovou:

$\boldsymbol{n}_q = (x;1) \Rightarrow |\boldsymbol{n}_q| = \sqrt{x^2+1^2}$, $\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{n}_q = (1;-3)\cdot(x;1) = x-3$

$$\cos\varphi = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{n}_q|}{|\boldsymbol{n}_p||\boldsymbol{n}_q|} = \frac{|x-3|}{\sqrt{10}\sqrt{x^2+1^2}}$$

$\sqrt{2}\sqrt{10}\sqrt{x^2+1^2} = 2|x-3|$

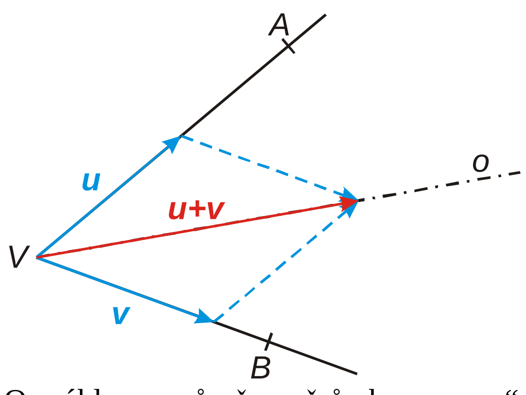
$5(x^2+1^2) = (x-3)^2 \Rightarrow 5x^2+5 = x^2-6x+9 \Rightarrow 4x^2+6x-4=0$

$$2x^2+3x-2=0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2} = \frac{-3\pm 5}{4} \Rightarrow$$

$x_1 = -2$, $\boldsymbol{n}_{q1} = (-2;1)$ (stejný směr jako vektor $\boldsymbol{n}_{q2} = (2;-1)$)

$x_2 = -\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{n}_{q2} = (0,5;1) \Rightarrow \boldsymbol{n}_{q2} = (1;2)$

Př. 7: Jsou dány body $A[1;3]$, $B[-4;-1]$ a $V[-3;1]$. Najdi obecnou rovnici osy úhlu *AVB*.



Osa úhlu = „průměr směrů obou ramen“ $\Rightarrow$ určíme vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ tak, aby platilo:

$\boldsymbol{u} = k(A-V)$, $k>0$ $\qquad$ $\boldsymbol{v} = l(B-V)$, $l>0$ $\qquad$ $|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{v}|$.

Vektor $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ pak bude mít směr osy úhlu *AVB*.

- $A-V = (4;2)$, $|A-V| = \sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5}$
- $B-V = (-1;-2)$, $|B-V| = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$

$\Rightarrow$ Vektor $A-V$ je dvakrát větší $\Rightarrow$ zmenšíme ho na polovinu.

$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}(A-V) = \frac{1}{2}(4;2) = (2;1)$

$\boldsymbol{v} = 1(B - V) = (-1;-2)$

$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (2;1) + (-1;-2) = (1;-1) = \boldsymbol{u}_o$

$\boldsymbol{n}_o = (1;1) \Rightarrow$ rovnice $x + y + c = 0$

Dosadíme bod $V[-3;1]$: $-3 + 1 + c = 0 \Rightarrow c = 2$.

Osa úhlu *AVB* má obecnou rovnici: $x + y + 2 = 0$.

Př. 8: Petáková:
strana 108/cvičení 47 e) g)
strana 108/cvičení 48 a) b)
strana 108/cvičení 50
strana 108/cvičení 52
strana 110/cvičení 77

Shrnutí: Výpočet odchylky přímek je založen na určení odchylky směrových vektorů. Hodnoty jsou menší než $90°$.