7.3.14 Vzdálenost bodu od přímky I

Předpoklady: 070308

Pedagogická poznámka: Pokud máte málo času, můžete odvodit vzorec bez samostatné práce studentů a použít některý z příkladů z další hodiny. Tím jednu ze dvou hodin pro vzdálenost bodu od přímky ušetříte.

Pedagogická poznámka: Pokud studenti řeší první příklad samostatně, je třeba s nimi probrat, které kroky bude při výpočtu nutno provést a donutit je, aby si ony body napsali do sešitu. Při odstraňování chyb se pak často bavíme o tom, který krok zrovna prováděli.

Pedagogická poznámka: Pokud nestihnete čtvrtý příklad celý v hodině, alespoň začněte a nechte ho žákům dopočítat doma, kvůli využití v příští hodině.

Př. 1: Urči vzdálenost bodu *P* od přímky *p*. Příklad řeš ve dvou sloupcích, vlevo konkrétně pro bod $P[-4;2]$ a přímku $p: 3x-4y-5=0$, vpravo obecně pro bod $P[p_1;p_2]$ a přímku $p: ax+by+c=0$. Přímku kolmou na přímku *p* vyjádři parametricky.

Postup při výpočtu:
1. Najdeme přímku *q*, která prochází bodem *P* a je kolmá na přímku *p*.
2. Najdeme průsečík *Q* přímek *p* a *q*.
3. Vzdálenost $d=|PQ|$ je vzdáleností bodu *P* od přímky *p*.

Určení přímky *q*:

Normálový vektor přímky *p* $\boldsymbol{n}_p=(3;-4)$ je směrovým vektorem kolmice *q* $\Rightarrow$

$$q: \begin{aligned} x&=-4+3t \\ y&=2-4t \end{aligned}.$$

Průsečík *Q* přímek *p* a *q*:

$p: 3x-4y-5=0$

$$q: \begin{aligned} x&=-4+3t \\ y&=2-4t \end{aligned}$$

$3(-4+3t)-4(2-4t)-5=0$

$25t-25=0$

$t=1$

Dosadíme do rovnice přímky *q*.

$x=-4+3t=-4+3\cdot1=-1$

$y=2-4t=2-4\cdot1=-2$

Průsečíkem je bod $Q[-1;-2]$.

Určení přímky *q*:

Normálový vektor přímky *p* $\boldsymbol{n}_p=(a;b)$ je směrovým vektorem kolmice *q* $\Rightarrow$

$$q: \begin{aligned} x&=p_1+at \\ y&=p_2+bt \end{aligned}.$$

Průsečík *Q* přímek *p* a *q*:

$p: ax+by+c=0$

$$q: \begin{aligned} x&=p_1+at \\ y&=p_2+bt \end{aligned}$$

$a(p_1+at)+b(p_2+bt)+c=0$

$ap_1+a^2t+bp_2+b^2t+c=0$

$a^2t+b^2t=-(ap_1+bp_2+c)$

$$t=-\frac{(ap_1+bp_2+c)}{a^2+b^2}$$

Výraz pro *t* je příliš složitý, bod *Q* budeme zapisovat bez toho, abychom za *t* dosadili.

Průsečíkem je bod $Q[p_1+at;p_2+bt]$.

Vzdálenost bodů *P* a *Q*

Vzdálenost bodů *P* a *Q*

$|PQ| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} =$

$= \sqrt{(-1-(-4))^2 + (-2-2)^2} = 5$

$|PQ| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} =$

$= \sqrt{([p_1 + at] - p_1)^2 + ([p_2 + bt] - p_2)^2} =$

$= \sqrt{a^2t^2 + b^2t^2} = \sqrt{t^2}\sqrt{a^2+b^2} = |t|\sqrt{a^2+b^2}$

Dosadíme parametr $t = -\frac{(ap_1 + bp_2 + c)}{a^2+b^2}$.

$|PQ| = |t|\sqrt{a^2+b^2} =$

$= \left| -\frac{(ap_1 + bp_2 + c)}{a^2+b^2} \right| \sqrt{a^2+b^2} =$

$= \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2} = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Získali jsme poměrně jednoduchý vzorec, který umožňuje spočítat vzdálenost bodu od přímky bez hledání průsečíku.

Vzdálenost bodu $P[p_1; p_2]$ od přímky $p: ax + by + c = 0$ je dána vzorcem
$d = |Pp| = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Z jakých částí se vzorec skládá:

- $|ap_1 + bp_2 + c|$ = dosazení bodu do rovnice přímky, pro bod na přímce vyjde nula, zřejmě větší absolutní hodnota výrazu znamená větší vzdálenost od přímky, hodnota však závisí na použitém normálovém vektoru,
- $\sqrt{a^2+b^2}$ = velikost normálového vektoru (větší normálový vektor znamená větší hodnotu výrazu v čitateli) $\Rightarrow$ hodnotu čitatele musíme vydělit velikostí vektoru.

Pedagogická poznámka: Určitě si s žáky o způsobu, jak si zapamatovat popovídejte, je to přesně to, co sami nedělají.

Př. 2: Urči vzdálenost bodu $P[-4;2]$ od přímky $p: 3x - 4y - 5 = 0$ pomocí odvozeného vzorce.

$p: 3x - 4y - 5 = 0$ $\qquad$ $P[-4;2]$

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|3\cdot(-4) - 4\cdot 2 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-25|}{5} = 5$$

Př. 3: V trojúhelníku *ABC*: $A[2;-1]$, $B[1;4]$, $C[-3;-3]$ urči:
a) výšku v_c; $\qquad$ b) výšku v_b (myslíme vzdálenost).

a) Výšku v_c určíme jako vzdálenost bodu *C* od přímky *AB*.

Určíme obecnou rovnici přímky *AB*: $\boldsymbol{s}_{AB} = (-1;5) \Rightarrow \boldsymbol{n}_{AB} = (5;1)$,

$5x + y + c = 0$.

Dosadíme bod $A[2;-1]$: $5 \cdot 2 + (-1) + c = 0 \Rightarrow c = -9$,

přímka *AB*: $5x + y - 9 = 0$.

$$v_C = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|5 \cdot (-3) + 1 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{|-27|}{\sqrt{26}} = \frac{27}{\sqrt{26}}.$$

b) Výšku v_b určíme jako vzdálenost bodu *B* od přímky *AC*.

Určíme obecnou rovnici přímky *AC*: $\boldsymbol{s}_{AC} = (-5;-2) \Rightarrow \boldsymbol{n}_{AC} = (2;-5)$,

$2x - 5y + c = 0$.

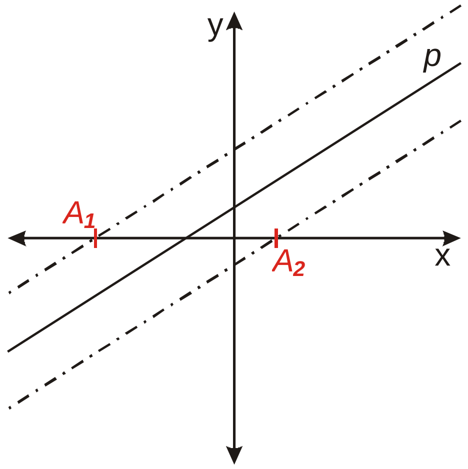
Dosadíme bod $A[2;-1]$: $2 \cdot 2 - 5(-1) + c = 0 \Rightarrow c = -9$,

přímka *AC*: $2x - 5y - 9 = 0$.

$$v_b = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot 1 - 5 \cdot 4 - 9|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{|-27|}{\sqrt{29}} = \frac{27}{\sqrt{29}}.$$

Pedagogická poznámka: S výškou v_c je třeba studenům pomoci, ale výšku v_b by měli vypočítat sami.

Př. 4: Na ose *x* najdi bod *A*, který má od přímky $p: x - 2y + 2 = 0$ vzdálenost $\sqrt{5}$. Než začneš příklad řešit analyticky, odhadni pomocí náčrtku počet řešení.



Z obrázku je zřejmé, že příklad by měl mít dvě řešení (oba body budou stejně vzdálené od průsečíku přímky *p* s osou *x*).

Souřadnice hledaného bodu: $A[a_x;0]$ (leží na ose *x*).

Určujeme jediné číslo $\Rightarrow$ na jeho určení stačí jediná rovnice $\Rightarrow$ dosadíme do vzorce pro vzdálenost bodu od přímky.

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{5}$$

$$\frac{|1 \cdot a_x - 2 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{5}$$

$$\frac{|a_x+2|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$|a_x+2|=5 \Rightarrow$ na číselné ose hledáme čísla vzdálená od čísla –2 o 5.

$a_{x1}=3$ $\qquad\qquad$ $a_{x2}=-7$

Na ose *x* splňují zadání dva body: $A_1[3;0]$ a $A_2[-7;0]$.

Pedagogická poznámka: Obrázek je důležitý. Studenti mají často tendenci absolutní hodnotu jednoduše vypustit a tak ztratí jedno řešení. S obrázek je větší šance, že začnou řešit, kam se jim druhé řešení ztratilo. Jde také o to, aby se u studentů podporovala snaha mít dopředu představu o tom, jak počítaný příklad vyjde.

Studenti, kteří značili souřadnice hledaného bodu $A[a_1;a_2]$ mají občas tendenci zaměnit označení dvou řešení za označení dvou souřadnic. Získají tak řešení $A[3;7]$, které je samozřejmě špatné.

Př. 5: Petáková:
strana 109/cvičení 63
strana 109/cvičení 66
strana 109/cvičení 68

Shrnutí: Pomocí obecné rovnice přímky můžeme spočítat jakou má od ní vzdálenost libovolný bod roviny.