

7.3.14 Vzdálenost bodu od přímky I

Předpoklady: 070308

Pedagogická poznámka: Pokud máte málo času, můžete odvodit vzorec bez samostatné práce studentů a použít některý z příkladů z další hodiny. Tím jednu ze dvou hodin pro vzdálenost bodu od přímky ušetříte.

Pedagogická poznámka: Pokud studenti řeší první příklad samostatně, je třeba s nimi probrat, které kroky bude při výpočtu nutno provést a donutit je, aby si ony body napsali do sešitu. Při odstraňování chyb se pak často bavíme o tom, který krok zrovna prováděli.

Pedagogická poznámka: Pokud nestihnete čtvrtý příklad celý v hodině, alespoň začněte a nechte ho žákům dopočítat doma, kvůli využití v příští hodině.

Př. 1: Urči vzdálenost bodu P od přímky p . Příklad řeš ve dvou sloupcích, vlevo konkrétně pro bod $P[-4;2]$ a přímku $p: 3x - 4y - 5 = 0$, vpravo obecně pro bod $P[p_1; p_2]$ a přímku $p: ax + by + c = 0$. Přímku kolmou na přímku p vyjádři parametricky.

Postup při výpočtu:

1. Najdeme přímku q , která prochází bodem P a je kolmá na přímku p .
2. Najdeme průsečík Q přímek p a q .
3. Vzdálenost $d = |PQ|$ je vzdáleností bodu P od přímky p .

Určení přímky q :

Normálový vektor přímky p $n_p = (3; -4)$ je směrovým vektorem kolmice $q \Rightarrow$

$$q: \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$$

Průsečík Q přímek p a q :

$$p: 3x - 4y - 5 = 0$$

$$x = -4 + 3t$$

$$q: y = 2 - 4t$$

$$3(-4 + 3t) - 4(2 - 4t) - 5 = 0$$

$$25t - 25 = 0$$

$$t = 1$$

Dosadíme do rovnice přímky q .

$$x = -4 + 3t = -4 + 3 \cdot 1 = -1$$

$$y = 2 - 4t = 2 - 4 \cdot 1 = -2$$

Průsečíkem je bod $Q[-1; -2]$.

Vzdálenost bodů P a Q

Určení přímky q :

Normálový vektor přímky p $n_p = (a; b)$ je směrovým vektorem kolmice $q \Rightarrow$

$$q: \begin{cases} x = p_1 + at \\ y = p_2 + bt \end{cases}$$

Průsečík Q přímek p a q :

$$p: ax + by + c = 0$$

$$x = p_1 + at$$

$$q: y = p_2 + bt$$

$$a(p_1 + at) + b(p_2 + bt) + c = 0$$

$$ap_1 + a^2t + bp_2 + b^2t + c = 0$$

$$a^2t + b^2t = -(ap_1 + bp_2 + c)$$

$$t = -\frac{(ap_1 + bp_2 + c)}{a^2 + b^2}$$

Výraz pro t je příliš složitý, bod Q budeme zapisovat bez toho, abychom za t dosadili.

Průsečíkem je bod $Q[p_1 + at; p_2 + bt]$.

Vzdálenost bodů P a Q

$$|PQ| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} = \\ = \sqrt{(-1 - (-4))^2 + (-2 - 2)^2} = 5$$

$$|PQ| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} = \\ = \sqrt{([p_1 + at] - p_1)^2 + ([p_2 + bt] - p_2)^2} = \\ = \sqrt{a^2 t^2 + b^2 t^2} = \sqrt{t^2} \sqrt{a^2 + b^2} = |t| \sqrt{a^2 + b^2}$$

Dosadíme parametr $t = -\frac{(ap_1 + bp_2 + c)}{a^2 + b^2}$.

$$|PQ| = |t| \sqrt{a^2 + b^2} = \\ = \left| -\frac{(ap_1 + bp_2 + c)}{a^2 + b^2} \right| \sqrt{a^2 + b^2} = \\ = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Získali jsme poměrně jednoduchý vzorec, který umožňuje spočítat vzdálenost bodu od přímky bez hledání průsečíku.

Vzdálenost bodu $P[p_1; p_2]$ od přímky $p: ax + by + c = 0$ je dána vztahem

$$d = |Pp| = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Z jakých částí se vzorec skládá:

- $|ap_1 + bp_2 + c|$ = dosazení bodu do rovnice přímky, pro bod na přímce vyjde nula, zřejmě větší absolutní hodnota výrazu znamená větší vzdálenost od přímky, hodnota však závisí na použitém normálovém vektoru,
- $\sqrt{a^2 + b^2}$ = velikost normálového vektoru (větší normálový vektor znamená větší hodnotu výrazu v čitateli) \Rightarrow hodnotu čitatele musíme vydělit velikostí vektoru.

Pedagogická poznámka: Určitě si s žáky o způsobu, jak si zapamatovat popovídejte, je to přesně to, co sami nedělají.

Př. 2: Urči vzdálenost bodu $P[-4; 2]$ od přímky $p: 3x - 4y - 5 = 0$ pomocí odvozeného vzorce.

$$p: 3x - 4y - 5 = 0 \quad P[-4; 2] \\ d = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot (-4) - 4 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-25|}{5} = 5$$

Př. 3: V trojúhelníku ABC : $A[2; -1]$, $B[1; 4]$, $C[-3; -3]$ urči:

- a) výšku v_c ; b) výšku v_b (myslíme vzdálenost).

a) Výšku v_c určíme jako vzdálenost bodu C od přímky AB .

Určíme obecnou rovnici přímky AB : $s_{AB} = (-1; 5) \Rightarrow n_{AB} = (5; 1)$,

$$5x + y + c = 0.$$

Dosadíme bod $A[2; -1]$: $5 \cdot 2 + (-1) + c = 0 \Rightarrow c = -9$,

přímka AB : $5x + y - 9 = 0$.

$$v_c = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|5 \cdot (-3) + 1 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{|-27|}{\sqrt{26}} = \frac{27}{\sqrt{26}}.$$

b) Výšku v_b určíme jako vzdálenost bodu B od přímky AC .

Určíme obecnou rovnici přímky AC : $s_{AC} = (-5; -2) \Rightarrow n_{AC} = (2; -5)$,

$$2x - 5y + c = 0.$$

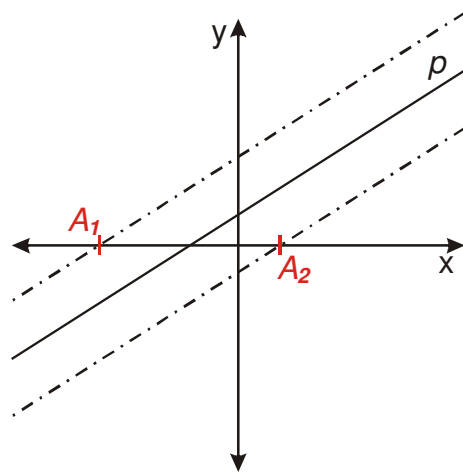
Dosadíme bod $A[2; -1]$: $2 \cdot 2 - 5(-1) + c = 0 \Rightarrow c = -9$,

přímka AC : $2x - 5y - 9 = 0$.

$$v_b = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot 1 - 5 \cdot 4 - 9|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{|-27|}{\sqrt{29}} = \frac{27}{\sqrt{29}}.$$

Pedagogická poznámka: S výškou v_c je třeba studentům pomoci, ale výšku v_b by měli počítat sami.

Př. 4: Na ose x najdi bod A , který má od přímky $p: x - 2y + 2 = 0$ vzdálenost $\sqrt{5}$. Než začneš příklad řešit analyticky, odhadni pomocí náčrtku počet řešení.



Z obrázku je zřejmé, že příklad by měl mít dvě řešení (oba body budou stejně vzdálené od průsečíku přímky p s osou x).

Souřadnice hledaného bodu: $A[a_x; 0]$ (leží na ose x).

Určíme jediné číslo \Rightarrow na jeho určení stačí jediná rovnice \Rightarrow dosadíme do vzorce pro vzdálenost bodu od přímky.

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{5}$$

$$\frac{|1 \cdot a_x - 2 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{5}$$

$$\frac{|a_x + 2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$|a_x + 2| = 5 \Rightarrow$ na číselné ose hledáme čísla vzdálená od čísla -2 o 5 .

$$a_{x1} = 3$$

$$a_{x2} = -7$$

Na ose x splňují zadání dva body: $A_1 [3;0]$ a $A_2 [-7;0]$.

Pedagogická poznámka: Obrázek je důležitý. Studenti mají často tendenci absolutní hodnotu jednoduše vypustit a tak ztratí jedno řešení. S obrázkem je větší šance, že začnou řešit, kam se jim druhé řešení ztratilo. Jde také o to, aby se u studentů podporovala snaha mít dopředu představu o tom, jak počítaný příklad vyjde.

Studenti, kteří značili souřadnice hledaného bodu $A[a_1; a_2]$ mají občas tendenci zaměnit označení dvou řešení za označení dvou souřadnic. Získají tak řešení $A[3; 7]$, které je samozřejmě špatné.

Př. 5: Petáková:

strana 109/cvičení 63

strana 109/cvičení 66

strana 109/cvičení 68

Shrnutí: Pomocí obecné rovnice přímky můžeme spočítat, jakou má od ní vzdálenost libovolný bod roviny.