

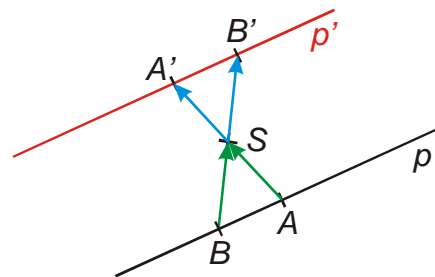
7.3.15 Další metrické úlohy I

Předpoklady: 7313, 7314

Pedagogická poznámka: Za normálních okolností není příliš pravděpodobné, že by většina studentů byla schopna přijít samostatně na řešení většiny úloh (jsou značně rozdílné a velká část z nich vyžaduje nápad). Používám proto trochu jinou strategii. Na začátku hodiny si projdeme všechny příklady a společně navrhneme řešení. Nejsme úplně konkrétní (většinou si říkáme body, které jsou v jednotlivých příkladech uvedeny tučně). Studenti si při tom udělají poznámky (přibližně tučný text v řešení úloh bez rovnic) a poté řeší úlohy samostatně. Já běhám mezi nimi a pomáhám v místech, kde si nejsou jistí.

Př. 1: Je dána přímka $p: 2x - y + 1 = 0$. Najdi přímku, která je s přímkou p středově souměrná podle středu $S[-2;1]$.

Přímku můžeme najít pomocí dvou bodů. Pro každý bod v rovině platí: $X' = S + (S - X) \Rightarrow$ **najdeme na přímce p dva body, zobrazíme je a s jejich pomocí najdeme rovnici přímky p' .**



Hledáme body na přímce p :

- $A[0;?] \Rightarrow 2 \cdot 0 - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A[0;1]$,
- $B[1;?] \Rightarrow 2 \cdot 1 - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow B[1;3]$.

Najdeme obrazy určených bodů:

- $A' = S + (S - A) = [-2;1] + (-2;0) = [-4;1]$,
- $B' = S + (S - B) = [-2;1] + (-3;-2) = [-5;-1]$.

Určíme rovnici přímky $A'B'$: $(B' - A') = (-1;-2) \Rightarrow \mathbf{n} = (2;-1)$.

Rovnice: $2x - y + c = 0 \Rightarrow$ dosadíme bod A' : $2 \cdot (-4) - 1 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = 9$.

Rovnice přímky $A'B'$: $2x - y + 9 = 0$.

Dodatek: Mohli bychom také spočítat souřadnice pouze jednoho bodu a udělat obraz přímky jako rovnoběžku procházející tímto bodem.

Pedagogická poznámka: Při řešení se vyskytují dva problémy? tradičně místo, kde je více možností – zvolení bodů na přímce p , při výpočtu používají studenti vektor $(S - A)$, pokud ho počítají zvlášť získají vektor $(-2;0)$, který mají tendenci krátit na tvar $(1;0)$. Většinou stačí, aby si

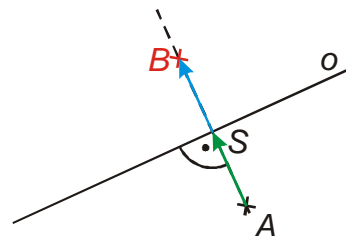
nakreslili obrázek s oběma vektory a ujasnili si, zda potřebují z vektoru pouze směr (jako při sestavování rovnic přímk) nebo i velikost a orientaci.

Př. 2: Najdi obraz B bodu $A[4; -4]$ v osové souměrnosti podle osy $o: x - 3y + 4 = 0$.

Příklad můžeme řešit dvěma způsoby.

Řešení napodobením geometrické konstrukce

1. Narýsujeme kolmici p na přímku o procházející bodem A .
2. Najdeme průsečík S přímky p s osou o .
3. Na přímce p sestrojíme bod B tak, aby bod S byl středem úsečky AB .



1. Kolmice p na přímku o procházející bodem A

$$\mathbf{n}_o = \mathbf{u}_p = (1; -3) \Rightarrow \text{přímka } p: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -4 - 3t; t \in R \end{cases}$$

2. Průsečík S přímky p s osou $o: x - 3y + 4 = 0$

$$\text{Přímka } p: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -4 - 3t; t \in R \end{cases}$$

Spočteme průsečík dosazením do rovnice pro osu o .

$$(4 + t) - 3(-4 - 3t) + 4 = 0$$

$$4 + t + 12 + 9t + 4 = 0$$

$$10t = -20$$

$$t = -2$$

$$\text{Dopočteme souřadnice průsečíku } S: \begin{cases} x = 4 + t = 4 - 2 = 2 \\ y = -4 - 3t = -4 - 3(-2) = 2 \end{cases} \Rightarrow S[2; 2].$$

3. Na přímce p sestrojíme bod B tak, aby bod S byl středem úsečky AB .

$$\text{Platí: } B = S + (S - A) \quad S - A = (-2; 6)$$

$$B = S + (S - A) = [2; 2] + (-2; 6) = [0; 8]$$

Obrazem bodu A v osové souměrnosti s osou o je bod $B = [0; 8]$.

Řešení zapsáním podmínek, které musí splňovat souřadnice hledaného bodu B .

Hledaný bod $B[b_1; b_2] \Rightarrow$ musíme najít dvě podmínky na sestavení dvou rovnic.

1. podmínka: Střed úsečky AB leží na ose $o: x - 3y + 4 = 0$.

$$\text{Střed úsečky } AB \ A[4; -4], \ B[b_1; b_2]: \ S\left[\frac{4+b_1}{2}; \frac{-4+b_2}{2}\right].$$

$$\text{Dosadíme do rovnice osy } o: \left(\frac{4+b_1}{2}\right) - 3\left(\frac{-4+b_2}{2}\right) + 4 = 0.$$

2. podmínka: Vektor AB je kolmý na osu o .

$$B - A = (b_1 - 4; b_2 + 4) \quad \mathbf{n}_o = (1; -3) \Rightarrow \mathbf{u}_o = (3; 1)$$

$$\mathbf{u}_o(B - A) = 0 \Rightarrow (3; 1)(b_1 - 4; b_2 + 4) = 3(b_1 - 4) + 1(b_2 + 4) = 0$$

Zjednodušíme obě rovnice:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4+b_1}{2}\right) - 3\left(\frac{-4+b_2}{2}\right) + 4 &= 0 \quad / \cdot 2 & 3(b_1 - 4) + 1(b_2 + 4) &= 0 \\ (4+b_1) - 3(-4+b_2) + 8 &= 0 & 3b_1 - 12 + b_2 + 4 &= 0 \\ 4 + b_1 + 12 - 3b_2 + 8 &= 0 & 3b_1 + b_2 &= 8 \\ b_1 - 3b_2 &= -24 \end{aligned}$$

Vyřešíme soustavu dosazovací metodou: $b_1 - 3b_2 = -24 \Rightarrow b_1 = 3b_2 - 24$.

$$3(3b_2 - 24) + b_2 = 8$$

$$9b_2 - 72 + b_2 = 8$$

$$10b_2 = 80$$

$$b_2 = 8$$

$$b_1 = 3b_2 - 24 = 3 \cdot 8 - 24 = 0$$

Obrazem bodu A v osově souměrnosti s osou o je bod $B = [0; 8]$.

Pedagogická poznámka: Občas si studenti stěžují, že je zbytečné počítat jeden příklad dvěma způsoby. Pokud by nám šlo o výsledek, pak mají určitě pravdu. Naším cílem je ale nácvik toho, jak se můžeme postavit k různým problémům. Pak mají oba způsoby své oprávnění.

Př. 3: Na přímce $p: 3x - 4y - 2 = 0$ najdi body, jejichž vzdálenost od bodu $S[2; 1]$ je 5.

Hledané body jsou body, které leží na přímce $3x - 4y - 2 = 0$ a zároveň na kružnici $k(S; 5)$
 \Rightarrow úloha bude mít žádné, jedno nebo dvě řešení (možnosti pro průsečíky přímky s kružnicí).

Hledáme bod $X[x; y] \Rightarrow$ dvě neznámé \Rightarrow potřebujeme dvě rovnice:

- **Bod $X[x; y]$ leží na přímce p :** $3x - 4y - 2 = 0$.
- **Vzdálenost bodu $X[x; y]$ od bodu $S[2; 1]$ je pět:** $|SX| = \sqrt{(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2} = 5$.

Dosadíme a upravíme druhou rovnici:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 5 \quad /^2$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 25$$

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y = 20$$

Řešíme soustavu: $3x - 4y - 2 = 0 \Rightarrow$ z první rovnice vyjádříme a dosadíme do druhé:
 $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 20$

$$3x - 4y - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{4y + 2}{3}$$

$$\left(\frac{4y+2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{4y+2}{3}\right) + y^2 - 2y = 20 \quad / \cdot 9$$

$$16y^2 + 16y + 4 - 48y - 24 + 9y^2 - 18y = 180$$

$$25y^2 - 50y - 200 = 0$$

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$(y-4)(y+2)=0$$

$$y_1 = 4 \Rightarrow x_1 = \frac{4y_1 + 2}{3} = \frac{4 \cdot 4 + 2}{3} = 6 \Rightarrow X_1[6; 4]$$

$$y_2 = -2 \Rightarrow x_2 = \frac{4y_2 + 2}{3} = \frac{4 \cdot (-2) + 2}{3} = -2 \Rightarrow X_2[-2; -2]$$

Př. 4: Najdi bod tak, aby byl trojúhelník ABC pravoúhlý s přeponou AB , kde $A[-3; 2], B[7; -3]$, a aby platilo $|AC|=5$.

Hledáme bod $C[x; y]$ tak, aby byly splněny dvě podmínky (zapišeme je rovnicemi).

1. Úhel ACB je pravoúhlý

\Rightarrow Vektory $C-A$ a $C-B$ jsou kolmé \Rightarrow jejich skalární součin je nulový.

$$C-A = (x+3; y-2) \qquad C-B = (x-7; y+3)$$

$$(C-A) \cdot (C-B) = (x+3; y-2)(x-7; y+3) = 0$$

$$x^2 - 7x + 3x - 21 + y^2 + 3y - 2y - 6 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x + y - 27 = 0$$

2. strana AC má délku 5

$$|AC| = \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = 5$$

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 - 25 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$$

Řešíme soustavu rovnic: $x^2 + y^2 - 4x + y - 27 = 0$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x + y - 27 = 0$$

$$\underline{[1] - [2]} \qquad -10x + 5y - 15 = 0 \quad /:5 \Rightarrow -2x + y = 3 \Rightarrow y = 2x + 3$$

Dosadíme do první rovnice: $\left(\frac{15-5y}{2}\right)^2 + y^2 - 4 \cdot \frac{15-5y}{2} + y - 27 = 0$.

$$x^2 + (2x+3)^2 - 4x + (2x+3) - 27 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 + 12x + 9 - 4x + 2x + 3 - 27 = 0$$

$$5x^2 + 10x - 15 = 0 \quad /:5$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

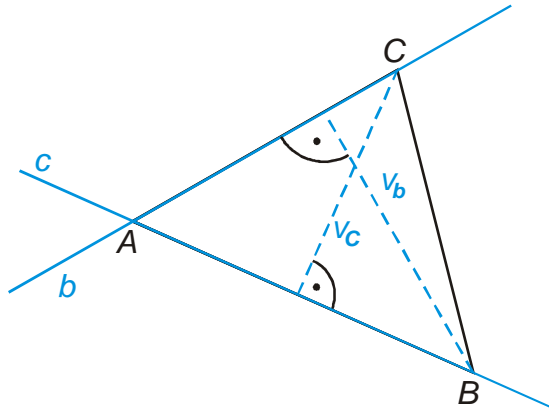
$$x_1 = -3 \Rightarrow y = 2x + 3 = 2(-3) + 3 = -3 \Rightarrow C[-3; -3]$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow y = 2x + 3 = 2 \cdot 1 + 3 = 5 \Rightarrow C[1; 5]$$

Př. 5: Najdi vrcholy trojúhelníka ABC , pokud známe: obecné rovnice dvou stran

$$b: x - 2y + 7 = 0 \text{ a } c: x + y + 1 = 0 \text{ a velikosti výšek } v_b = \frac{21\sqrt{5}}{5}, v_c = 3\sqrt{2}.$$

Nakreslíme si obrázek.



Bod A najdeme jako průsečík přímek b a c .

Bod B najdeme jako bod, který:

- leží na přímce c ,
- je od přímky b vzdálený v_b .

Bod C najdeme jako bod, který:

- leží na přímce b ,
- je od přímky c vzdálený v_c .

Hledání bodu A jako průsečíku přímek b a c

Řešíme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{r} x - 2y + 7 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{array}$$

$$[2] - [1] \quad 3y - 6 = 0 \Rightarrow y = 2$$

Dopočteme: $x + 2 + 1 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow A[-3; 2]$.

Určujeme bod $B[b_1; b_2]$.

Leží na přímce c : $b_1 + b_2 + 1 = 0$.

Vzdálenost bodu $B[b_1; b_2]$ od přímky b se rovná $\frac{21\sqrt{5}}{5} : \frac{|b_1 - 2b_2 + 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{21\sqrt{5}}{5}$.

\Rightarrow Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých: $b_1 + b_2 + 1 = 0 \Rightarrow b_1 = -1 - b_2$.

$$\frac{|-1 - b_2 - 2b_2 + 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{21\sqrt{5}}{5} \quad / \cdot 5$$

$$\sqrt{5}|6 - 3b_2| = 21\sqrt{5} \quad / : \sqrt{5}$$

$$3|2 - b_2| = 21 \quad / : 3 \quad (\text{použijeme } |2 - b_2| = |b_2 - 2|)$$

$|b_2 - 2| = 7 \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od dvojky o 7 \Rightarrow dvě řešení:

- $b_2 = 9 \Rightarrow b_1 = -1 - b_2 = -1 - 9 = -10 \Rightarrow B_1[-10; 9]$
- $b_2 = -5 \Rightarrow b_1 = -1 - b_2 = -1 - (-5) = 4 \Rightarrow B_2[4; -5]$

Určujeme bod $C[c_1; c_2]$.

Leží na přímce b : $c_1 - 2c_2 + 7 = 0$.

Vzdálenost bodu $C[c_1; c_2]$ od přímky c se rovná $3\sqrt{2} : \frac{|c_1 + c_2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2}$.

\Rightarrow Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých: $c_1 - 2c_2 + 7 = 0 \Rightarrow c_1 = 2c_2 - 7$.

$$\frac{|2c_2 - 7 + c_2 + 1|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \quad / \cdot \sqrt{2}$$

$$|3c_2 - 6| = 6$$

$$3|c_2 - 2| = 6 \quad /:3 \quad (\text{použijeme } |2 - b_2| = |b_2 - 2|)$$

$|c_2 - 2| = 2 \Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od dvojky o 2 \Rightarrow dvě řešení:

- $c_2 = 4 \Rightarrow c_1 = 2c_2 - 7 = 2 \cdot 4 - 7 = 1 \Rightarrow C_1[1; 4]$
- $c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 2c_2 - 7 = 2 \cdot 0 - 7 = -7 \Rightarrow C_2[-7; 0]$

Podmínky zadání splňují všechny trojúhelníky ABC , které získáme kombinací vrcholů $A[-3; 2]$, $B_1[-10; 9]$, $B_2[4; -5]$, $C_1[1; 4]$, $C_2[-7; 0]$. Příklad má tedy $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$ řešení.

Pedagogická poznámka: Označení $B[b_1; b_2]$ používám místo $B[b_x; b_y]$ schválně. U

slabších studentů pomáhá k vytváření chaosu v závěru příkladu, kde se objevují dvě řešení. Cílem je opět to, aby se orientovali v příkladu a uvědomili si, že index b_1 znamená x -vou souřadnici a ne první ze dvou řešení.

Př. 6: Petáková:

strana 111 cvičení 91

strana 111 cvičení 92

strana 111 cvičení 96

strana 111 cvičení 99

Shrnutí: