

### 7.3.15 Vzdálenost bodu od přímky II

**Předpoklady:** 070314

**Pedagogická poznámka:** Kvůli příští hodině je třeba připomenout žákům, aby se podívali na výpočet úhlu, který svírají dva vektory.

**Pedagogická poznámka:** Průběh hodiny hodně závisí na tom, jak odolní jsou studenti v dosazování do vzorců, které je nejtěžší částí hodiny. Dalším problémem pak mohou být rovnice s absolutní hodnotou.

**Pedagogická poznámka:** Následující příklad navazuje na poslední příklad minulé hodiny. Snažím se, aby si studenti ujasnili, co je stejné, co je jinak a podle toho se zařídili.

**Pedagogická poznámka:** Následující příklad počítáme pouze analytickým přístupem (druhá varianta), konstrukční přístup je uveden pouze pro demonstraci. Body na přímce najdeme dva, v každé lavici tak vznikne dvojice, která se snaží dojít k výsledku dvěma (trošku) různými způsoby.

**Př. 1:** Najdi přímku, která je rovnoběžná s přímkou  $p: x - 3y + 2 = 0$  a je od ní vzdálena  $\sqrt{10}$ .

Dva způsoby řešení.

**Konstrukční přístup:** Hledaná přímka je rovnoběžná  $\Rightarrow$  rovnice  $x - 3y + c = 0 \Rightarrow$  potřebujeme najít bod, přes který přímka prochází  $\Rightarrow$  hledáme bod vzdálený od přímky  $x - 3y + 2 = 0$  o  $\sqrt{10} \Rightarrow$  takových bodů je nekonečně mnoho  $\Rightarrow$  musíme omezit výběr, například budeme hledat pouze body na ose  $y$ .

**Analytický přístup:** Hledaná přímka je rovnoběžná  $\Rightarrow$  rovnice  $x - 3y + c = 0$  hledáme podmínku, kterou přímka splňuje a která nám určí parametr  $c$ . Hledaná přímka je vzdálena od přímky  $x - 3y + 2 = 0$  o  $\sqrt{10} \Rightarrow$  je vzdálena od libovolného bodu přímky  $x - 3y + 2 = 0$  o  $\sqrt{10}$ .

Hledáme bod na přímce  $p: x - 3y + 2 = 0$ : jednu souřadnici zvolíme, druhou dopočítáme.

Volíme souřadnici  $y$  (u  $x$  je číslo 1  $\Rightarrow$  při dopočítávání souřadnice se nemusí dělit), nekonečně mnoho možností.

- $y = 0 \Rightarrow x - 3 \cdot 0 + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow P_1[-2; 0]$ ,
- $y = 1 \Rightarrow x - 3 \cdot 1 + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow P_2[1; 1]$ .

Hledaná přímka  $x - 3y + c = 0$  je od nalezeného bodu vzdálena o  $\sqrt{10}$ .

Bod  $P_1[-2; 0]$ , přímka  $x - 3y + c = 0$ .

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \cdot (-2) - 3 \cdot 0 + c|}{\sqrt{1 + (-3)^2}} = \sqrt{10}$$

$$\frac{|-2 + c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \quad \cdot / \sqrt{10}$$

$$|c - 2| = 10 \Rightarrow \text{hledáme čísla, jejichž obraz je}$$

Bod  $P_2[1; 1]$ , přímka  $x - 3y + c = 0$ .

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + c|}{\sqrt{1 + (-3)^2}} = \sqrt{10}$$

$$\frac{|-2 + c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \quad \cdot / \sqrt{10}$$

$$|c - 2| = 10 \Rightarrow \text{hledáme čísla, jejichž obraz je}$$

od obrazu čísla 2 vzdálený o 10  $\Rightarrow$   
 $c_1 = 12, c_2 = -8.$

od obrazu čísla 2 vzdálený o 10  $\Rightarrow$   
 $c_1 = 12, c_2 = -8.$

V rovině existují ve vzdálenosti  $\sqrt{10}$  dvě přímky rovnoběžné s přímkou  $p: x - 3y + 2 = 0$ :  
 $q_1: x - 3y + 12 = 0, q_2: x - 3y - 8 = 0.$

**Ke stejnému výsledku bychom dospěli i konstrukčním přístupem.**

Bod na ose y:  $A[0; a_y]$ . Dosadíme do vzorce pro vzdálenost:

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \cdot 0 - 3 \cdot a_y + 2|}{\sqrt{1 + (-3)^2}} = \sqrt{10}.$$

$$\frac{|-3a_y + 2|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \quad \text{Použijeme } |-3a_y + 2| = |3a_y - 2|.$$

$$|3a_y - 2| = 10$$

Rovnice s absolutní hodnotou  $\Rightarrow$  dělíme na intervaly:  $3a_y - 2 = 0 \Rightarrow a_y = \frac{2}{3}.$

$$a_y \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \Rightarrow$$

$$3a_y - 2 \leq 0 \Rightarrow |3a_y - 2| = -3a_y + 2$$

$$-3a_y + 2 = 10$$

$$3a_y = -8$$

$$a_y = -\frac{8}{3}$$

$$a_y \in \left(\frac{2}{3}; \infty\right) \Rightarrow$$

$$3a_y - 2 \geq 0 \Rightarrow |3a_y - 2| = 3a_y - 2$$

$$3a_y - 2 = 10$$

$$3a_y = 12$$

$$a_y = 4$$

$\Rightarrow$  Dva body, které splňují podmínky.

$$A_1[0; 4]$$

Dosadíme do rovnice:

$$x - 3y + c = x - 3 \cdot 4 + c = 0 \Rightarrow c = 12.$$

$$x - 3y + 12 = 0$$

$$A_2\left[0; -\frac{8}{3}\right]$$

Dosadíme do rovnice:

$$x - 3y + c = x - 3 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) + c = 0 \Rightarrow c = -8.$$

$$x - 3y - 8 = 0$$

**Pedagogická poznámka:** U konstrukčního přístupu velká část žáků potřebuje diskusi o roli bodu A v řešení příkladu. Jde o to, aby si uvědomili, že bod A je pouze pomocným cílem k nalezení rovnic přímky a že si ho můžeme volit libovolně. Nic nám tedy nebrání si ho zvolit co nejjednodušeji.

**Př. 2:** Na přímce  $x + 3y - 1 = 0$  najdi bod, který je od přímky  $2x + y - 7 = 0$  vzdálen  $2\sqrt{5}$ .

Souřadnice bodu  $A[a_x; a_y] \Rightarrow$  na určení dvou neznámých potřebujeme dvě rovnice.

- Bod A leží na přímce  $x + 3y - 1 = 0 \Rightarrow$  vyhovuje její rovnici  $\Rightarrow a_x + 3 \cdot a_y - 1 = 0.$

- Bod  $A$  je od přímky  $2x + y - 7 = 0$  vzdálen  $2\sqrt{5}$ :

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot a_x + a_y - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 2\sqrt{5}.$$

Z první rovnice  $a_x + 3 \cdot a_y - 1 = 0$  dosadíme do druhé  $a_x = 1 - 3a_y$ .

$$\frac{|2 \cdot (1 - 3a_y) + a_y - 7|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \quad / \cdot \sqrt{5}$$

$$|2 - 6a_y + a_y - 7| = 10$$

$$|-5a_y - 5| = 10$$

$$|-5||a_y + 1| = 10$$

$$|a_y - (-1)| = 2 \Rightarrow \text{hledáme čísla vzdálená od } -1 \text{ o dva.}$$

- $a_{y1} = 1 \Rightarrow a_x = 1 - 3a_y = 1 - 3 \cdot 1 = -2 \Rightarrow A_1[-2; 1]$
- $a_{y2} = -3 \Rightarrow a_x = 1 - 3a_y = 1 - 3 \cdot (-3) = 10 \Rightarrow A_2[10; -3]$

Řešením příkladu je dvojice bodů  $A_1[-2; 1]$  a  $A_2[10; -3]$ .

**Pedagogická poznámka:** Nejdůležitějším místem příkladu je sestavení rovnic. Napíšeme podmínky na tabuli slovně, ale sestavení rovnic musí nejdříve provést samostatně žáci.

Orientaci v příkladu může zlepšit pojmenování přímek. Žákům to nezakazuji, ale ani to za ně nedělám.

**Př. 3:** Sestav soustavu rovnic v předchozím příkladu, pokud si jako hledaný bod zvolíme bod  $B[x; y]$ .

Souřadnice bodu  $B[x; y] \Rightarrow$  na určení dvou neznámých potřebujeme dvě rovnice.

- Bod  $B$  leží na přímce  $x + 3y - 1 = 0 \Rightarrow$  vyhovuje její rovnici  $x + 3y - 1 = 0$ .
- Bod  $B$  je od přímky  $2x + y - 7 = 0$  vzdálen  $2\sqrt{5}$ :

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot x + y - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 2\sqrt{5}.$$

Použití bodu  $B[x; y]$  je rychlejší, ale vyžaduje lepší orientaci v dosazování do rovnic.

**Pedagogická poznámka:** Pro některé studenty je předchozí dosazení opravdu oříšek, zejména fakt v první podmínce, kdy po dosazení zůstane rovnice beze změny.

**Př. 4:** Jsou dány dvě rovnoběžné přímky  $x - 2y + 6 = 0$  a  $2x - 4y - 5 = 0$ . Najdi přímku, která je s nimi rovnoběžná a má od obou stejnou vzdálenost.

Příklad je možné řešit dvěma způsoby: analyticky a napodobením konstrukce.

**Analytické řešení:**

Hledaná přímka je rovnoběžná s přímkou  $2x - 4y - 5 = 0 \Rightarrow$  je popsána rovnicí  $2x - 4y + c = 0$ . Koeficient  $c$  určíme pomocí libovolného bodu na této přímce. Zvolíme si například bod s nulovou  $x$ -ovou souřadnicí:  $2 \cdot 0 - 4y + c = 0 \Rightarrow y = \frac{c}{4}$ .

Bod  $\left[0; \frac{c}{4}\right]$  je stejně vzdálen od přímek  $x - 2y + 6 = 0$  a  $2x - 4y - 5 = 0$ .

$$\frac{\left|0 - 2 \cdot \frac{c}{4} + 6\right|}{\sqrt{1 + (-2)^2}} = \frac{\left|2 \cdot 0 - 4 \cdot \frac{c}{4} - 5\right|}{\sqrt{2 + (-4)^2}} \Rightarrow \frac{\left|-\frac{c}{2} + 6\right|}{\sqrt{5}} = \frac{|-c - 5|}{\sqrt{20}} \quad / \cdot 2\sqrt{5}$$

$$2 \left| -1 \left| \frac{c}{2} - 6 \right| \right| = |-1| |c + 5|$$

$|c - 12| = |c + 5| \Rightarrow$  řešíme po intervalech:

- $c \in (-\infty; -5) \Rightarrow -c + 12 = -c - 5 \Rightarrow 17 = 0 \Rightarrow K = \emptyset$
- $c \in \langle -5; 12 \rangle \Rightarrow -c + 12 = c + 5 \Rightarrow 2c = \frac{7}{2} \Rightarrow c = \frac{7}{4}$
- $c \in \langle 12; \infty \rangle \Rightarrow c - 12 = c + 5 \Rightarrow -17 = 0 \Rightarrow K = \emptyset$

Hledanou přímkou je přímka  $2x - 4y + \frac{7}{2} = 0$ .

#### Konstrukční řešení:

Rovnoběžku, která je osou pásu můžeme vést středem libovolné úsečky, která má krajní body na přímkách  $x - 2y + 6 = 0$  a  $2x - 4y - 5 = 0$ .

- Průsečík přímky  $x - 2y + 6 = 0$  s osou  $y$ :  $0 - 2y + 6 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow$  bod  $A[0; 3]$ .
- Průsečík přímky  $2x - 4y - 5 = 0$  s osou  $y$ :  $2 \cdot 0 - 4y - 5 = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{4} \Rightarrow$  bod

$$B \left[ 0; -\frac{5}{4} \right].$$

$$3 + \left( -\frac{5}{4} \right) = \frac{12 - 5}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow \text{střed úsečky } AB: S_{AB} \left[ 0; \frac{7}{8} \right].$$

Rovnice rovnoběžky:  $2x - 4y + c = 0$ , dosadíme bod  $S_{AB} \left[ 0; \frac{7}{8} \right]$ :  $2 \cdot 0 - 4 \cdot \frac{7}{8} + c = 0 \Rightarrow c = \frac{7}{2}$

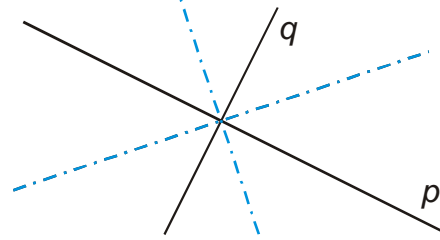
Osou pásu je přímka  $2x - 4y + \frac{7}{2} = 0$ .

**Pedagogická poznámka:** Studenti mají tendenci udělat průměr z koeficientů  $c$  v obou rovnicích, což je možné pouze v případě, že jsou obě rovnice postavené na stejném normálovém vektoru. V takovém případě, jde samozřejmě o řešení nejrychlejší:

$$2x - 4y + 12 = 0, \quad 2x - 4y - 5 = 0 \Rightarrow c = \frac{12 + (-5)}{2} = \frac{7}{2}.$$

**Př. 5:** Najdi všechny body roviny, které mají stejnou vzdálenost od přímek  $p: x+2y-3=0$  a  $q: 2x-y-1=0$ .

Z obrázku je zřejmé, že hledané body tvoří dvě přímky – osy obou úhlů, které přímky svírají.



Zkusíme najít tyto přímky pomocí podmínky ze zadání.

Hledáme body  $X[x; y]$ .

- Vzdálenost bodu  $X[x; y]$  od přímky  $p: x+2y-3=0$ :  $\frac{|x+2y-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}$ .
- Vzdálenost bodu  $X[x; y]$  od přímky  $q: 2x-y-1=0$ :  $\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}$ .

Obě vzdálenosti se rovnají:  $\frac{|x+2y-3|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x-y-1|}{\sqrt{5}} \quad /: \sqrt{5}$ .

$|x+2y-3| = |2x-y-1| \Rightarrow$  musíme odstranit absolutní hodnoty. Dvě možnosti:

- umocnění:  $(x+2y-3)^2 = (2x-y-1)^2$  - získáme strašné výrazy na obou stranách, ověřování si ušetříme, obě strany byly před umocněním kladné,
- odstranění absolutní hodnoty: výhodnější nepřibudou nám druhé mocniny.

Jak zjistíme, kdy odstranit absolutní hodnoty, výrazy uvnitř jsou složité. Jsou jen čtyři možnosti, které rovnou vyzkoušíme:

- oba výrazy záporné:  $|x+2y-3| = |2x-y-1| \Rightarrow -(x+2y-3) = -(2x-y-1)$   
 $-x-2y+3 = -2x+y+1$   
 $x-3y+2 = 0$
- oba výrazy kladné:  $|x+2y-3| = |2x-y-1| \Rightarrow x+2y-3 = 2x-y-1$   
 $x-3y+2 = 0$  (stejná přímka jako v předchozím případě)
- levý výraz kladný, pravý záporný:  $|x+2y-3| = |2x-y-1| \Rightarrow$   
 $x+2y-3 = -(2x-y-1)$   
 $x+2y-3 = -2x+y+1$   
 $3x+y-4 = 0$
- levý výraz záporný, pravý kladný:  $|x+2y-3| = |2x-y-1| \Rightarrow$   
 $-(x+2y-3) = 2x-y-1$   
 $-x-2y+3 = 2x-y-1$   
 $3x+y-4 = 0$  (stejná přímka jako v předchozím případě)

Množinu všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od přímek  $p: x+2y-3=0$  a  $q: 2x-y-1=0$  tvoří dvojice přímek  $x-3y+2=0$  a  $3x+y-4=0$ .

**Př. 6:** Petáková:  
strana 109/cvičení 65

strana 109/cvičení 66  
strana 109/cvičení 68  
strana 109/cvičení 74

---

**Shrnutí:**