

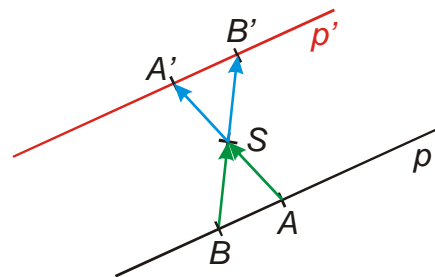
### 7.3.17 Další metrické úlohy I

**Předpoklady:** 070315, 070316

**Pedagogická poznámka:** Za normálních okolností není příliš pravděpodobné, že by většina studentů byla schopna přijít samostatně na řešení většiny úloh (jsou značně rozdílné a velká část z nich vyžaduje nápad). Používám proto trochu jinou strategii. Na začátku hodiny si projdeme všechny příklady a společně navrhne řešení. Nejsme úplně konkrétní (většinou si říkáme body, které jsou v jednotlivých příkladech uvedeny tučně). Studenti si při tom udělají poznámky (přibližně tučný text v řešení úloh bez rovnic) a poté řeší úlohy samostatně. Já běhám mezi nimi a pomáhám v místech, kde si nejsou jistí.

**Př. 1:** Je dána přímka  $p: 2x - y + 1 = 0$ . Najdi přímku, která je s přímkou  $p$  středově souměrná podle středu  $S[-2;1]$ .

Přímku můžeme najít pomocí dvou bodů. Pro každý bod v rovině platí:  $X' = S + (S - X) \Rightarrow$  **najdeme na přímce  $p$  dva body, zobrazíme je a s jejich pomocí najdeme rovnici přímky  $p'$ .**



Hledáme body na přímce  $p$ :

- $A[0;?] \Rightarrow 2 \cdot 0 - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A[0;1]$ ,
- $B[1;?] \Rightarrow 2 \cdot 1 - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow B[1;3]$ .

Najdeme obrazy určených bodů:

- $A' = S + (S - A) = [-2;1] + (-2;0) = [-4;1]$ ,
- $B' = S + (S - B) = [-2;1] + (-3;-2) = [-5;-1]$ .

Uurčíme rovnici přímky  $A'B'$ :  $(B' - A') = (-1;-2) \Rightarrow \mathbf{n} = (2;-1)$ .

Rovnice:  $2x - y + c = 0 \Rightarrow$  dosadíme bod  $A'$ :  $2 \cdot (-4) - 1 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = 9$ .

Rovnice přímky  $A'B'$ :  $2x - y + 9 = 0$ .

**Dodatek:** Mohli bychom také spočítat souřadnice pouze jednoho bodu a udělat obraz přímky jako rovnoběžku procházející tímto bodem.

**Pedagogická poznámka:** Při řešení se vyskytují dva problémy? tradičně místo, kde je více možností – zvolení bodů na přímce  $p$ , při výpočtu používají studenti vektor  $(S - A)$ , pokud ho počítají zvlášť získají vektor  $(-2;0)$ , který mají tendenci krátit na tvar  $(1;0)$ . Většinou stačí, aby si

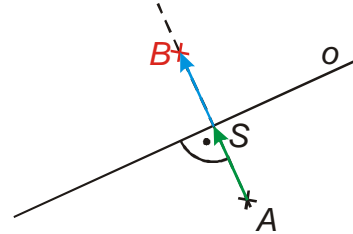
nakreslili obrázek s oběma vektory a ujasnili si, zda potřebují z vektoru pouze směr (jako při sestavování rovnic přímk) nebo i velikost a orientaci.

**Př. 2:** Najdi obraz  $B$  bodu  $A[4; -4]$  v osové souměrnosti podle osy  $o: x - 3y + 4 = 0$ .

Příklad můžeme řešit dvěma způsoby.

**Řešení napodobením geometrické konstrukce**

1. Narýsujeme kolmici  $p$  na přímku  $o$  procházející bodem  $A$ .
2. Najdeme průsečík  $S$  přímky  $p$  s osou  $o$ .
3. Na přímce  $p$  sestrojíme bod  $B$  tak, aby bod  $S$  byl středem úsečky  $AB$ .



**1. Kolmice  $p$  na přímku  $o$  procházející bodem  $A$**

$$n_o = u_p = (1; -3) \Rightarrow \text{přímka } p: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -4 - 3t; t \in R \end{cases}$$

**2. Průsečík  $S$  přímky  $p$  s osou  $o: x - 3y + 4 = 0$**

$$\text{Přímka } p: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -4 - 3t; t \in R \end{cases}$$

Spočteme průsečík dosazením do rovnice pro osu  $o$ .

$$(4 + t) - 3(-4 - 3t) + 4 = 0$$

$$4 + t + 12 + 9t + 4 = 0$$

$$10t = -20$$

$$t = -2$$

$$\text{Dopočteme souřadnice průsečíku } S: \begin{cases} x = 4 + t = 4 - 2 = 2 \\ y = -4 - 3t = -4 - 3(-2) = 2 \end{cases} \Rightarrow S[2; 2].$$

**3. Na přímce  $p$  sestrojíme bod  $B$  tak, aby bod  $S$  byl středem úsečky  $AB$ .**

$$\text{Platí: } B = S + (S - A) \quad S - A = (-2; 6)$$

$$B = S + (S - A) = [2; 2] + (-2; 6) = [0; 8]$$

Obrazem bodu  $A$  v osové souměrnosti s osou  $o$  je bod  $B = [0; 8]$ .

**Řešení zapsáním podmínek, které musí splňovat souřadnice hledaného bodu  $B$ .**

Hledaný bod  $B[b_1; b_2] \Rightarrow$  musíme najít dvě podmínky na sestavení dvou rovnic.

**1. podmínka: Střed úsečky  $AB$  leží na ose  $o: x - 3y + 4 = 0$ .**

$$\text{Střed úsečky } AB \text{ } A[4; -4], B[b_1; b_2]: S\left[\frac{4 + b_1}{2}; \frac{-4 + b_2}{2}\right].$$

$$\text{Dosadíme do rovnice osy } o: \left(\frac{4 + b_1}{2}\right) - 3\left(\frac{-4 + b_2}{2}\right) + 4 = 0.$$

**2. podmínka: Vektor  $AB$  je kolmý na osu  $o$ .**

$$B - A = (b_1 - 4; b_2 + 4) \quad n_o = (1; -3) \Rightarrow u_o = (3; 1)$$

$$u_o(B - A) = 0 \Rightarrow (3; 1)(b_1 - 4; b_2 + 4) = 3(b_1 - 4) + 1(b_2 + 4) = 0$$

Zjednodušíme obě rovnice:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4+b_1}{2}\right) - 3\left(\frac{-4+b_2}{2}\right) + 4 &= 0 \quad / \cdot 2 & 3(b_1 - 4) + 1(b_2 + 4) &= 0 \\ (4+b_1) - 3(-4+b_2) + 8 &= 0 & 3b_1 - 12 + b_2 + 4 &= 0 \\ 4 + b_1 + 12 - 3b_2 + 8 &= 0 & 3b_1 + b_2 &= 8 \\ b_1 - 3b_2 &= -24 \end{aligned}$$

Vyřešíme soustavu dosazovací metodou:  $b_1 - 3b_2 = -24 \Rightarrow b_1 = 3b_2 - 24$ .

$$3(3b_2 - 24) + b_2 = 8$$

$$9b_2 - 72 + b_2 = 8$$

$$10b_2 = 80$$

$$b_2 = 8$$

$$b_1 = 3b_2 - 24 = 3 \cdot 8 - 24 = 0$$

Obrazem bodu  $A$  v osové souměrnosti s osou  $o$  je bod  $B = [0; 8]$ .

**Pedagogická poznámka:** Občas si studenti stěžují, že je zbytečné počítat jeden příklad dvěma způsoby. Pokud by nám šlo o výsledek, pak mají určitě pravdu. Naším cílem je ale nácvik toho, jak se můžeme postavit k různým problémům. Pak mají oba způsoby své oprávnění.

**Př. 3:** Na přímce  $p: 3x - 4y - 2 = 0$  najdi body, jejichž vzdálenost od bodu  $S[2; 1]$  je 5.

Hledané body jsou body, které leží na přímce  $3x - 4y - 2 = 0$  a zároveň na kružnici  $k(S; 5)$   
 $\Rightarrow$  úloha bude mít žádné, jedno nebo dvě řešení (možnosti pro průsečíky přímky s kružnicí).

Hledáme bod  $X[x; y] \Rightarrow$  dvě neznámé  $\Rightarrow$  potřebujeme dvě rovnice:

- **Bod  $X[x; y]$  leží na přímce  $p$ :**  $3x - 4y - 2 = 0$ .
- **Vzdálenost bodu  $X[x; y]$  od bodu  $S[2; 1]$  je pět:**  $|SX| = \sqrt{(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2} = 5$ .

Dosadíme a upravíme druhou rovnici:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 5 \quad /^2$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 25$$

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y = 20$$

Řešíme soustavu:  $3x - 4y - 2 = 0 \Rightarrow$  z první rovnice vyjádříme a dosadíme do druhé:  
 $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 20$

$$3x - 4y - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{4y + 2}{3}$$

$$\left(\frac{4y+2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{4y+2}{3}\right) + y^2 - 2y = 20 \quad / \cdot 9$$

$$16y^2 + 16y + 4 - 48y - 24 + 9y^2 - 18y = 180$$

$$25y^2 - 50y - 200 = 0$$

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$(y-4)(y+2)=0$$

$$y_1 = 4 \Rightarrow x_1 = \frac{4y_1 + 2}{3} = \frac{4 \cdot 4 + 2}{3} = 6 \Rightarrow X_1[6; 4]$$

$$y_2 = -2 \Rightarrow x_2 = \frac{4y_2 + 2}{3} = \frac{4 \cdot (-2) + 2}{3} = -2 \Rightarrow X_2[-2; -2]$$

**Př. 4:** Najdi bod tak, aby byl trojúhelník  $ABC$  pravoúhlý s přeponou  $AB$ , kde  $A[-3; 2], B[7; -3]$ , a aby platilo  $|AC|=5$ .

Hledáme bod  $C[x; y]$  tak, aby byly splněny dvě podmínky (zapišeme je rovnicemi).

### 1. Úhel $ACB$ je pravoúhlý

$\Rightarrow$  Vektory  $C-A$  a  $C-B$  jsou kolmé  $\Rightarrow$  jejich skalární součin je nulový.

$$C-A = (x+3; y-2) \qquad C-B = (x-7; y+3)$$

$$(C-A) \cdot (C-B) = (x+3; y-2)(x-7; y+3) = 0$$

$$x^2 - 7x + 3x - 21 + y^2 + 3y - 2y - 6 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x + y - 27 = 0$$

### 2. strana $AC$ má délku 5

$$|AC| = \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = 5$$

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 - 25 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$$

Řešíme soustavu rovnic:  $x^2 + y^2 - 4x + y - 27 = 0$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x + y - 27 = 0$$

$$\underline{[1] - [2]} \qquad -10x + 5y - 15 = 0 \quad /:5 \Rightarrow -2x + y = 3 \Rightarrow y = 2x + 3$$

Dosadíme do první rovnice:  $\left(\frac{15-5y}{2}\right)^2 + y^2 - 4 \cdot \frac{15-5y}{2} + y - 27 = 0$ .

$$x^2 + (2x+3)^2 - 4x + (2x+3) - 27 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 + 12x + 9 - 4x + 2x + 3 - 27 = 0$$

$$5x^2 + 10x - 15 = 0 \quad /:5$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

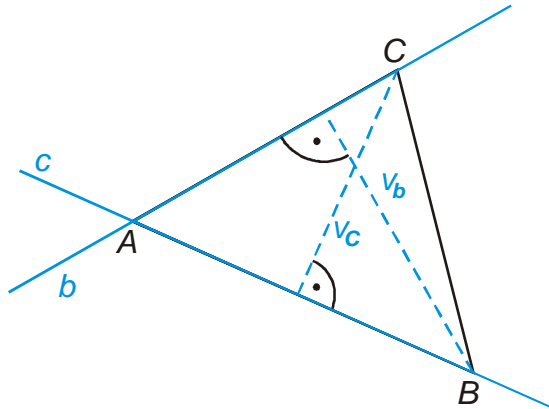
$$x_1 = -3 \Rightarrow y = 2x + 3 = 2(-3) + 3 = -3 \Rightarrow C[-3; -3]$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow y = 2x + 3 = 2 \cdot 1 + 3 = 5 \Rightarrow C[1; 5]$$

**Př. 5:** Najdi vrcholy trojúhelníka  $ABC$ , pokud známe: obecné rovnice dvou stran

$$b: x - 2y + 7 = 0 \text{ a } c: x + y + 1 = 0 \text{ a velikosti výšek } v_b = \frac{21\sqrt{5}}{5}, v_c = 3\sqrt{2}.$$

Nakreslíme si obrázek.



Bod  $A$  najdeme jako průsečík přímek  $b$  a  $c$ .

Bod  $B$  najdeme jako bod, který:

- leží na přímce  $c$ ,
- je od přímky  $b$  vzdálený  $v_b$ .

Bod  $C$  najdeme jako bod, který:

- leží na přímce  $b$ ,
- je od přímky  $c$  vzdálený  $v_c$ .

**Hledání bodu  $A$  jako průsečíku přímek  $b$  a  $c$**

Řešíme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{r} x - 2y + 7 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{array}$$

$$[2] - [1] \quad 3y - 6 = 0 \Rightarrow y = 2$$

Dopočteme:  $x + 2 + 1 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow A[-3; 2]$ .

**Určujeme bod  $B[b_1; b_2]$ .**

Leží na přímce  $c$ :  $b_1 + b_2 + 1 = 0$ .

Vzdálenost bodu  $B[b_1; b_2]$  od přímky  $b$  se rovná  $\frac{21\sqrt{5}}{5} : \frac{|b_1 - 2b_2 + 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{21\sqrt{5}}{5}$ .

$\Rightarrow$  Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:  $b_1 + b_2 + 1 = 0 \Rightarrow b_1 = -1 - b_2$ .

$$\frac{|-1 - b_2 - 2b_2 + 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{21\sqrt{5}}{5} \quad / \cdot 5$$

$$\sqrt{5}|6 - 3b_2| = 21\sqrt{5} \quad / : \sqrt{5}$$

$$3|2 - b_2| = 21 \quad / : 3 \quad (\text{použijeme } |2 - b_2| = |b_2 - 2|)$$

$|b_2 - 2| = 7 \Rightarrow$  hledáme čísla vzdálená od dvojky o 7  $\Rightarrow$  dvě řešení:

- $b_2 = 9 \Rightarrow b_1 = -1 - b_2 = -1 - 9 = -10 \Rightarrow B_1[-10; 9]$
- $b_2 = -5 \Rightarrow b_1 = -1 - b_2 = -1 - (-5) = 4 \Rightarrow B_2[4; -5]$

**Určujeme bod  $C[c_1; c_2]$ .**

Leží na přímce  $b$ :  $c_1 - 2c_2 + 7 = 0$ .

Vzdálenost bodu  $C[c_1; c_2]$  od přímky  $c$  se rovná  $3\sqrt{2} : \frac{|c_1 + c_2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2}$ .

$\Rightarrow$  Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:  $c_1 - 2c_2 + 7 = 0 \Rightarrow c_1 = 2c_2 - 7$ .

$$\frac{|2c_2 - 7 + c_2 + 1|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \quad / \cdot \sqrt{2}$$

$$|3c_2 - 6| = 6$$

$$3|c_2 - 2| = 6 \quad /:3 \quad (\text{použijeme } |2 - b_2| = |b_2 - 2|)$$

$|c_2 - 2| = 2 \Rightarrow$  hledáme čísla vzdálená od dvojky o 2  $\Rightarrow$  dvě řešení:

- $c_2 = 4 \Rightarrow c_1 = 2c_2 - 7 = 2 \cdot 4 - 7 = 1 \Rightarrow C_1[1; 4]$
- $c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 2c_2 - 7 = 2 \cdot 0 - 7 = -7 \Rightarrow C_2[-7; 0]$

Podmínky zadání splňují všechny trojúhelníky  $ABC$ , které získáme kombinací vrcholů  $A[-3; 2]$ ,  $B_1[-10; 9]$ ,  $B_2[4; -5]$ ,  $C_1[1; 4]$ ,  $C_2[-7; 0]$ . Příklad má tedy  $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$  řešení.

**Pedagogická poznámka:** Označení  $B[b_1; b_2]$  používám místo  $B[b_x; b_y]$  schválně. U

slabších studentů pomáhá k vytváření chaosu v závěru příkladu, kde se objevují dvě řešení. Cílem je opět to, aby se orientovali v příkladu a uvědomili si, že index  $b_1$  znamená  $x$ -vou souřadnici a ne první ze dvou řešení.

**Př. 6:** Petáková:

strana 111 cvičení 91

strana 111 cvičení 92

strana 111 cvičení 96

strana 111 cvičení 99

**Shrnutí:**