

7.3.18 Další metrické úlohy II

Předpoklady: 070317

Př. 1: Najdi přímku rovnoběžnou s osou I a III kvadrantu vzdálenou od bodu $A[-1;-2]$ $2\sqrt{2}$.

Osou I a III kvadrantu je přímka $y = x \Rightarrow$ přímky s ní rovnoběžné mají rovnici $x - y + c = 0$.

Vzdálenost přímky od bodu $A[-1;-2]$: $\frac{|-1 - (-2) + c|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$.

$$\frac{|1+c|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \quad / \cdot \sqrt{2}$$

$|c+1| = |c - (-1)| = 4 \Rightarrow$ Hledáme čísla, jejichž obraz na číselné ose od obrazu čísla (-1) je vzdálený o 4 \Rightarrow dvě řešení:

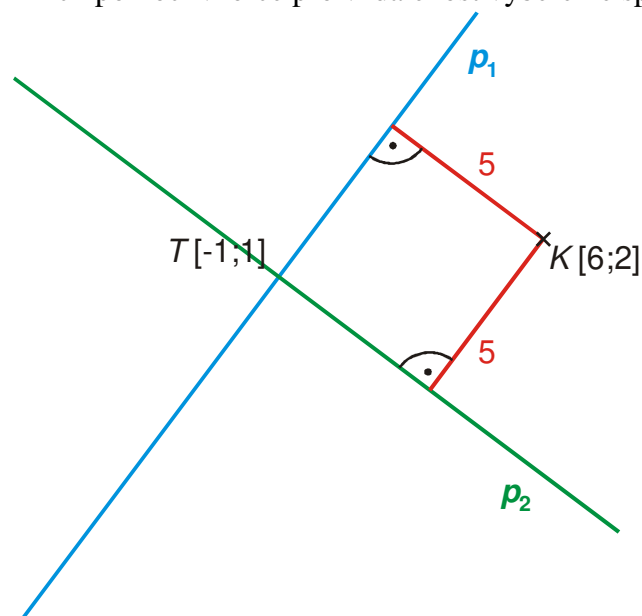
- $c_1 = 3 \Rightarrow$ přímka $x - y + 3 = 0$,
- $c_2 = -5 \Rightarrow$ přímka $x - y - 5 = 0$.

Podmínky zadání splňují přímky $x - y + 3 = 0$ a $x - y - 5 = 0$.

Př. 2: Které z přímek procházejících bodem $T[-1;1]$ mají od bodu $K[6;2]$ vzdálenost 5?

Problém: Hledáme přímku, známe jeden její bod \Rightarrow musíme určit její směr.

Správnou přímku najdeme pomocí její vzdálenosti od bodu $K \Rightarrow$ potřebujeme její obecnou rovnici, abychom mohli použít vzorec \Rightarrow napíšeme všechny přímky procházející bodem T a z nich pomocí vzorce pro vzdálenost vybereme správné hodnoty parametru



\Rightarrow Z obrázku je zřejmé, že můžeme očekávat dvě řešení.

Rovnice přímky, u které známe bod a neznáme směr \Rightarrow směrnicový tvar

$$(y - y_0) = k(x - x_0).$$

Dosadíme bod $T[-1;1] \Rightarrow (y-1) = k(x-[-1])$ (nezapsali jsme přímku $x = -1$).

Převědeme na obecnou rovnici: $y-1 = kx+k \Rightarrow kx-y+k+1=0$.

Vzorec pro vzdálenost bodu od přímky: $\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = d = 5$.

Dosadíme přímku $kx-y+k+1=0$: $\frac{|kx-y+k+1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} = 5$.

Určujeme vzdálenost od bodu $K[6;2]$: $\frac{|k \cdot 6 - 2 + k + 1|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = 5$.

$$\frac{|6k - 2 + k + 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 5$$

$$\frac{|7k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 5 \quad /^2$$

$$\frac{49k^2 - 14k + 1}{k^2 + 1} = 25 \quad / (k^2 + 1)$$

$$49k^2 - 14k + 1 = 25(k^2 + 1)$$

$$24k^2 - 14k - 24 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 24 \cdot (-24)}}{2 \cdot 24} = \frac{14 \pm \sqrt{2500}}{48} = \frac{14 \pm 50}{48}$$

$$k_1 = \frac{14 + 50}{48} = \frac{64}{48} = \frac{4}{3} \quad k_2 = \frac{14 - 50}{48} = \frac{-36}{48} = -\frac{3}{4}$$

\Rightarrow Získali jsme dva kořeny (očekávali jsme dvě řešení) \Rightarrow nemusíme prověřovat přímku $x = -1$. Hledané přímky:

$$p_1: (y-1) = \frac{4}{3}(x+1)$$

$$p_2: (y-1) = -\frac{3}{4}(x+1)$$

$$3y - 3 = 4x + 4$$

$$4y - 4 = -3x - 3$$

$$p_1: 4x - 3y + 7 = 0$$

$$p_2: 3x + 4y - 1 = 0$$

Vzdálenost 5 mají z přímek procházejících bodem $T[-1;1]$ od bodu $K[6;2]$ přímky

$$p_1: 4x - 3y + 7 = 0, \quad p_2: 3x + 4y - 1 = 0.$$

Pedagogická poznámka: Příklad je důležitý. Využívá typicky analytický postup se zapsáním útvaru pomocí parametru. Je jasné, že studenti budou potřebovat pomoc při návrhu řešení. Je nutné dávat pozor při dosazování do vzorce pro vzdálenost. Značná část studentů bude mít problémy s orientací v písmenkách.

Př. 3: Jsou dány body $A[-3;1], B[5;-3]; C[4;1]; D[0;3]$.

a) Dokaž, že body A, B, C, D určují lichoběžník.

b) Vypočti velikost úhlu α .

c) Urči výšku lichoběžníku.

a) Dokaž, že body A, B, C, D určují lichoběžník.

Lichoběžník má alespoň dvě rovnoběžné strany \Rightarrow alespoň jedna dvojice vektorů, které určují protější strany, musí být navzájem rovnoběžná (navzájem svými násobky).

$$B - A = (8; -4) \quad C - D = (4; -2)$$

\Rightarrow platí $(B - A) = 2(C - D) \Rightarrow$ strany AB a CD jsou rovnoběžné.

$$D - A = (3; 2) \quad C - B = (-1; 4)$$

\Rightarrow neplatí $(D - A) = k(C - B) \Rightarrow$ strany AD a BC nejsou rovnoběžné.

Body A, B, C, D určují lichoběžník se základnami AB a CD .

b) Vypočti velikost úhlu α .

Úhel α je úhel mezi vektory $D - A$ a $B - A$

$$B - A = (8; -4) \Rightarrow \text{Použijeme zkrácený tvar: } \mathbf{u} = (2; -1), |\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

$$D - A = (3; 2) \Rightarrow \mathbf{v} = (3; 2), |\mathbf{v}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{(2; -1)(3; 2)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = \frac{6 - 2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} \Rightarrow \alpha = 60^\circ 15'$$

Úhel α má velikost $60^\circ 15'$.

c) Urči výšku lichoběžníku.

Výška lichoběžníku se rovná vzdálenosti jeho základů, tedy například vzdálenosti bodu D od přímky AB .

$$\text{Obecná rovnice přímky } AB: B - A = (8; -4) \Rightarrow \mathbf{u} = (2; -1) \Rightarrow \mathbf{n} = (1; 2).$$

$$\text{Rovnice } x + 2y + c = 0, \text{ dosadíme bod } A[-3; 1]: -3 + 2 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = 1.$$

$$\text{Vzdálenost bodu } D[0; 3] \text{ od přímky } x + 2y + 1 = 0: \frac{|0 + 2 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Výška lichoběžníku } ABCD \text{ je } \frac{7\sqrt{5}}{5}.$$

Př. 4: Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC , $c = 7$ cm, $b = 5$ cm, $v_c = 4$ cm. Urči výšku v_b .

Výšku v_b určíme pomocí analytické geometrie snadno, ale musíme znát souřadnice vrcholů

\Rightarrow nejdříve určíme souřadnice vrcholů a s jejich pomocí pak požadovanou výšku v_b .

Umístění trojúhelníku si můžeme zvolit \Rightarrow hledáme co nejjednodušší řešení:

- bod A umístíme do počátku soustavy souřadnic $\Rightarrow A[0; 0]$,
- stranu c umístíme na osu $x \Rightarrow B[7; 0]$.

V trojúhelníku platí $v_c = 4$ cm \Rightarrow bod C musí ležet na přímce rovnoběžné s osou x , vzdálené od ní 4 cm \Rightarrow bod C leží na přímce $y = 4 \Rightarrow$ souřadnice bodu $C[c; 4]$.

Poslední známá vlastnost trojúhelníka ABC : $b = |AC| = 5$ cm.

$$\sqrt{(c-0)^2 + (4-0)^2} = 5$$

$$c^2 + 16 = 25$$

$$c^2 = 9 \Rightarrow \text{dvě řešení:}$$

$$c_1 = -3 - \text{nevyhovuje zadání, úhel } BAC \text{ by byl určitě tupý.}$$

$$c_2 = 3 \Rightarrow C[3; 4]$$

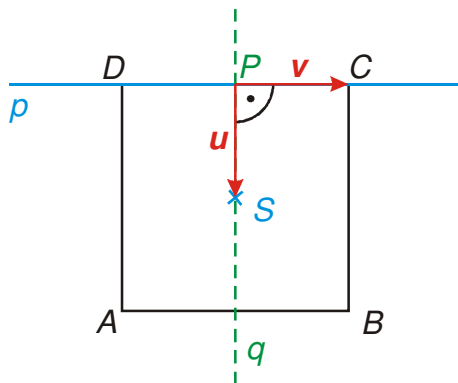
Výška v_b je rovna vzdálenosti bodu B od přímky AC .

Obecná rovnice přímky AC : $C - A = (3; 4) \Rightarrow \mathbf{n} = (4; -3) \Rightarrow$ rovnice $4x - 3y + c = 0$,
bod $A[0; 0] \Rightarrow c = 0 \Rightarrow$ rovnice $4x - 3y = 0$.

Vzdálenost bodu $B[7; 0]$ od přímky $4x - 3y = 0$: $\frac{|4 \cdot 7 - 3 \cdot 0|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{28}{5}$

V trojúhelníku ABC platí, že $v_b = \frac{28}{5}$ cm.

Př. 5: Urči vrcholy čtverce, pokud znáš souřadnice středu čtverce $S[-1; 0]$ a rovnici přímky $p: x - 2y + 6 = 0$, na které leží strana CD .



Z obrázku je vidět, že:

- jako průsečík přímky p a přímky q (kolmice na přímku p procházející bodem S) najdeme bod P (střed strany DC),
- pomocí bodu P určíme vektor \mathbf{u} ,
- vektor \mathbf{v} určíme jako vektor kolmý na \mathbf{u} o stejné velikosti,
- pomocí vektorů \mathbf{u} a \mathbf{v} dopočteme posunutím vrcholy čtverce.

Přímka $q: \mathbf{u}_q = \mathbf{n}_p = (1; -2)$, bod $S[-1; 0] \Rightarrow q: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2t, t \in R \end{cases}$
 $x - 2y + 6 = 0$

Hledáme průsečík přímek p a $q \Rightarrow$ soustava rovnic: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2t \end{cases}$

Dosadíme do první rovnice: $-1 + t - 2(-2t) + 6 = 0$.

$5t + 5 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow$ souřadnice bodu $P: \begin{cases} x = -1 + t = -1 - 1 = -2 \\ y = -2t = -2(-1) = 2 \end{cases} \Rightarrow P[-2; 2]$.

Výpočet vektorů: $\mathbf{u} = S - P = (1; -2)$, $\mathbf{v} = (2; 1)$.

Výpočet vrcholů: $C = P + \mathbf{v} = [-2; 2] + (2; 1) = [0; 3]$

$D = P - \mathbf{v} = [-2; 2] - (2; 1) = [-4; 1]$

$A = D + 2\mathbf{u} = [-4; 1] + 2(1; -2) = [-2; -3]$

$B = C + 2\mathbf{u} = [0; 3] + 2(1; -2) = [2; -1]$

Čtverec $ABCD$ má vrcholy v bodech $A[-2; -3]$, $B[2; -1]$, $C[0; 3]$, $D[-4; 1]$.

Př. 6: Najdi vrcholy obdélníku $ABCD$, pokud znáš souřadnice bodů $A[0; -2]$, $C[6; 6]$ a rovnici přímky $p: x - 3y - 12 = 0$, na které leží bod B .

Hledáme souřadnice bodu $B[x; y] \Rightarrow$ potřebujeme najít dvě rovnice.

1. rovnice: Bod B leží na přímce $p: x - 3y - 12 = 0$.

2. rovnice: Strany obdélníku jsou na sebe kolmé \Rightarrow vektory $B-A$ a $B-C$ jsou na sebe kolmé \Rightarrow skalární součin je nulový: $(B-A) \cdot (B-C) = 0$.

$$B-A = (x-0; y+2) \qquad B-C = (x-6; y-6)$$

$$(B-A) \cdot (B-C) = (x; y+2) \cdot (x-6; y-6) = 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 6y + 2y - 12 = 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y - 12 = 0. \text{ Dosadíme z první rovnice: } x - 3y - 12 = 0 \Rightarrow x = 3y + 12.$$

$$(3y+12)^2 - 6(3y+12) + y^2 - 4y - 12 = 0$$

$$9y^2 + 72y + 144 - 18y - 72 + y^2 - 4y - 12 = 0$$

$$10y^2 + 50y + 60 = 0 \quad / :10$$

$$y^2 + 5y + 6 = (y+3)(y+2) = 0 \Rightarrow \text{dvě řešení:}$$

$$y_1 = -3$$

$$y_2 = -2$$

$$x_1 = 3y + 12 = 3 \cdot (-3) + 12 = 3 \Rightarrow B_1[3; -3]$$

$$x_2 = 3y + 12 = 3 \cdot (-2) + 12 = 6 \Rightarrow B_2[6; -2]$$

$$D_1 = C + (A - B_1) = [6; 6] + (-3; 1) = [3; 7]$$

$$D_2 = C + (A - B_2) = [6; 6] + (-6; 0) = [0; 6]$$

Hledanými vrcholy obdélníka jsou body $B_1[3; -3]$, $D_1[3; 7]$ nebo $B_2[6; -2]$, $D_2[0; 6]$.

Př. 7: Petáková:

strana 111 cvičení 103

strana 111 cvičení 110

strana 112 cvičení 117

strana 112 cvičení 119

strana 112 cvičení 124

Shrnutí: