

## 7.4.6 Polohové úlohy v prostoru I

**Předpoklady:** 7405

**Pedagogická poznámka:** Polohové úlohy jsou sice rozepsány do dvou hodin, ale pokud chcete, aby převážnou část příklady spočítala větší část třídy, budete potřebovat hodiny tři.

**Př. 1:** Jaká může být v prostoru vzájemná poloha přímky a roviny? Jakým způsobem určíme vzájemnou polohu parametricky zadané přímky a roviny dané obecnou rovnicí? Nakresli diagram, který zachytí postup při určování vzájemné polohy roviny a přímky.

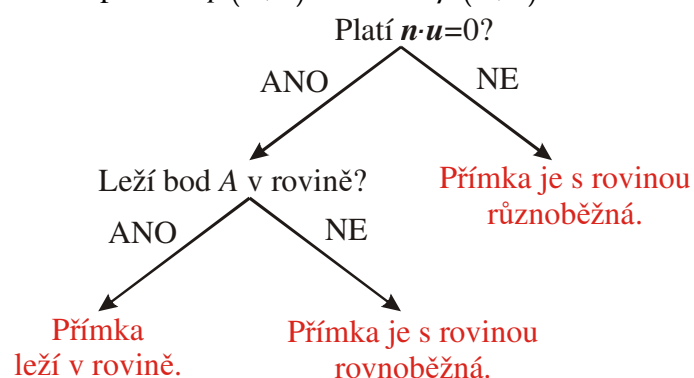
Tři možnosti vzájemné polohy:

- přímka je s rovinou různoběžná (její směrový vektor není kolmý na normálový vektor roviny),
- přímka je s rovinou rovnoběžná (její směrový vektor je kolmý na normálový vektor roviny, ale přímka nemá s rovinou žádný společný bod),
- přímka leží v rovině (její směrový vektor je kolmý na normálový vektor roviny, a všechny body přímky leží v rovině).

**Jak postupovat? Dvě možnosti:**

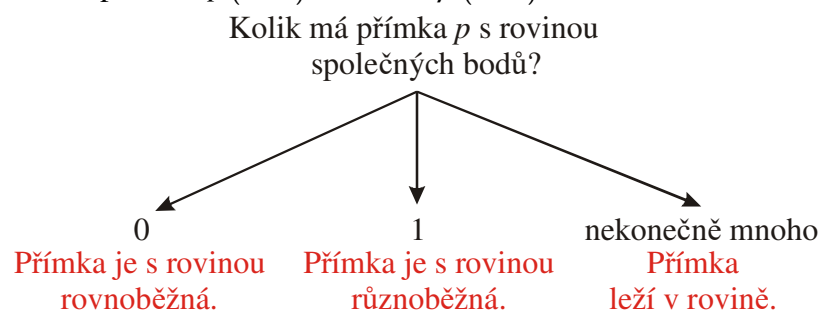
**a) podle vektorů**

Máme přímku  $p(A;u)$  a rovinu  $\rho(B;n)$ .



**b) podle počtu společných bodů**

Máme přímku  $p(A;u)$  a rovinu  $\rho(B;n)$ .



**Pedagogická poznámka:** Stejně jako ve všech podobných příkladech snažte se studenty dotlačit k tomu, aby si situace modelovali pomocí lavice, sešitů a tužek.

Mechanicky uvažující studenti mají tendenci okopírovat postup pro vzájemnou polohu dvou přímek a rozhodovat se podle toho, zda jsou vektory  $u, n$  rovnoběžné.

**Př. 2:** Urči vzájemnou polohu přímky  $p = \{[1+t; 2-3t; 2+2t], t \in R\}$  a roviny  $\rho: 3x - y - 3z + 2 = 0$ . Pokud je přímka s rovinou různoběžná, najdi jejich průsečík.

V případě, že je přímka je s rovinou různoběžná, máme nalézt průsečík  $\Rightarrow$  určíme společnou polohu výpočtem společných bodů.

$$x = 1 + t$$

Rovnice přímky:  $y = 2 - 3t$ , rovnice roviny:  $3x - y - 3z + 2 = 0$ .

$$z = 2 + 2t, t \in R$$

Dosadíme z rovnice přímky do rovnice roviny:  $3 \cdot (1+t) - (2-3t) - 3 \cdot (2+2t) + 2 = 0$

$$3 + 3t - 2 + 3t - 6 - 6t + 2 = 0$$

$-3 = 0 \Rightarrow$  přímka  $p$  nemá s rovinou  $\rho$  žádný společný bod  $\Rightarrow$  přímka  $p$  je s rovinou  $\rho$  rovnoběžná.

**Dodatek:** Příklad můžeme řešit i pomocí prvního schématu:

$$u_p = (1; -3; 2) \quad n_\rho = (3; -1; -3)$$

Vypočteme skalární součin:

$$u_p \cdot n_\rho = (1; -3; 2) \cdot (3; -1; -3) = 1 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) = 0 \Rightarrow \text{přímka } p \text{ je s rovinou}$$

$\rho$  rovnoběžná nebo v ní leží.

Zjistíme, zda v rovině leží bod  $A[1; 2; 2]$  z parametrického vyjádření přímky  $p$ :

$$3 \cdot 1 - 2 - 3 \cdot 2 + 2 = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{bod } A \text{ v rovině } \rho \text{ neleží} \Rightarrow \text{přímka } p \text{ je s rovinou } \rho$$

rovnoběžná.

**Dodatek:** O počtu průsečíků přímky roviny rozhoduje při dosazení

$3 \cdot (1+t) - (2-3t) - 3 \cdot (2+2t) + 2 = 0$  počet  $t$ , které zůstanou po roznásobení a sečtení levé strany (pokud vyjde na levé straně  $0t$  průsečík neexistuje nebo jich je nekonečně mnoho. Tento součet vzniká násobením složek normálového vektoru roviny v obecné rovnici (v našem případě koeficienty 3, -1, -3) se souřadnicemi směrového vektoru přímky (v našem případě koeficienty 1, -3, 2). I v tomto případě tak vlastně počítáme skalární součin vektorů  $u_p \cdot n_\rho$ .

**Př. 3:** Najdi rovinu  $\sigma$ , která je rovnoběžná s rovinou  $\rho: 2x - y + z + 2 = 0$  a leží v ní jedna z přímek  $p = \{[3t; -1-2t; 2-t], t \in R\}$ ,  $q = \{[3-s; 3; 2+2s], s \in R\}$ .

Rovina  $\sigma$  je rovnoběžná s rovinou  $\rho \Rightarrow$  jako normálové můžeme u obou použít stejné vektory.

Pokud má přímka  $p$  nebo  $q$  ležet v rovině  $\sigma$ , musí být rovnoběžná s rovinou  $\rho \Rightarrow$  zjistíme přes skalární součin.

$$u_p = (3; -2; -1)$$

$$u_q = (-1; 0; 2)$$

$$n_\rho = (2; -1; 1)$$

- $\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{n}_\rho = (3; -2; -1) \cdot (2; -1; 1) = 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = 7 \Rightarrow$  přímka  $p$  není rovnoběžná s rovinou  $\rho$ .
- $\mathbf{u}_q \cdot \mathbf{n}_\rho = (-1; 0; 2) \cdot (2; -1; 1) = (-1) \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$  přímka  $q$  rovnoběžná s rovinou  $\rho$ .

$\Rightarrow$  Hledáme rovinu  $\sigma$  rovnoběžnou s rovinou  $\rho$ , ve které leží přímka  $q$ ,  $\Rightarrow$  rovina  $\sigma$  musí obsahovat libovolný bod přímky  $q$ .

$$\mathbf{n}_\sigma = \mathbf{n}_\rho = (2; -1; 1) \text{ rovnice } 2x - y + z + d = 0$$

Dosadíme bod  $B[3; 3; 2]$  z parametrického vyjádření přímky  $q$ :  $2 \cdot 3 - 3 + 2 + d = 0 \Rightarrow d = -5$ .

Rovina  $\sigma$  má obecnou rovnici  $2x - y + z - 5 = 0$ .

**Pedagogická poznámka:** Překvapilo mě, že studenti neměli ani tak problém s tím, že musí nejdříve ověřit, zda je některá z přímek rovnoběžná s rovinou  $\rho$ , jako s tím, aby pak sestavili danou rovinu. Automaticky se totiž snažili upotřebit směrový vektor přímky  $q$ . Měli podvědomý pocit, že když už ji vybrali, měli by z ní zužitkovat více než jen jeden bod.

**Př. 4:** Urči vzájemnou polohu přímky  $AB$ ,  $A[0; 0; 4]$ ,  $B[-2; 2; 0]$  a roviny  $\rho: x + 2y - z + 1 = 0$ . Pokud je přímka s rovinou různoběžná, najdi jejich průsečík.

Nejdříve najdeme parametrické vyjádření přímky  $AB$ :

$$B - A = (-2; 2; -4) \Rightarrow \mathbf{u}_{AB} = (1; -1; 2) \Rightarrow AB: \{[t; -t; 4 + 2t], t \in \mathbb{R}\}.$$

Zjišťujeme rovnoběžnost přímky  $AB$  a roviny  $\rho$ :

$$\mathbf{u}_{AB} = (1; -1; 2) \quad \mathbf{n}_\rho = (1; 2; -1)$$

$$\mathbf{u}_{AB} \cdot \mathbf{n}_\rho = (1; -1; 2) \cdot (1; 2; -1) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = -3 \Rightarrow \text{přímka } AB \text{ je s rovinou } \rho \text{ různoběžná.}$$

Hledáme průsečík, vyhovuje rovnicím přímky i roviny  $\Rightarrow$  soustava čtyř rovnic o čtyřech

$$x + 2y - z + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{neznámých:} \quad & x = t \\ & y = -t \\ & z = 4 + 2t \end{aligned}$$

Dosadíme z druhé, třetí a čtvrté rovnice do první:  $x + 2y - z + 1 = t + 2(-t) - (4 + 2t) + 1 = 0$ .

$$-3t - 3 = 0$$

$$t = -1$$

$$x = t = -1$$

Vypočteme souřadnice průsečíku:  $y = -t = -(-1) = 1$

$$z = 4 + 2t = 4 + 2(-1) = 2$$

Přímka  $AB$  se protne s rovinou  $\rho$  v bodě  $P[-1; 1; 2]$ .

**Př. 5:** Najdi kolmý průmět přímky  $AB$  z předchozího příkladu do roviny  $\rho$  z předchozího příkladu.

Kolmý průmět přímky  $AB$  do roviny  $\rho =$  přímka, která leží v rovině  $\rho \Rightarrow$  potřebujeme dva body:

- 1. bod - průsečík přímky  $AB$  s rovinou  $\rho$  (bod  $P[-1;1;2]$ )
- 2. bod - průsečík roviny  $\rho$  s přímkou, která je k ní kolmá a vede z libovolného bodu přímky  $AB$ .

$\Rightarrow$  Zvolíme libovolný bod přímky  $AB$ , nejjednodušší  $A[0;0;4]$ .

Přímka kolmá k rovině  $\rho$  procházející bodem  $A[0;0;4]$ ,  $s_k = \mathbf{n}_\rho = (1;2;-1)$ :  $y = 2t$  .  
 $z = 4 - t$

Průsečík kolmice s rovinou:  $x + 2y - z + 1 = t + 2(2t) - (4 - t) + 1 = 0$ .

$$6t = 3 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$x = t = \frac{1}{2}$$

Dopočítáme druhý průsečík  $Q$ :  $y = 2t = 1 \Rightarrow Q\left[\frac{1}{2}; 1; \frac{7}{2}\right]$ .

$$z = 4 - t = \frac{7}{2}$$

Rovnice přímky  $PQ$ :  $Q - P = \left(\frac{3}{2}; 0; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \mathbf{u}_{PQ} = (1; 0; 1)$ ,  $P[-1; 1; 2]$ .

$$x = -1 + t$$

Rovnice kolmého průměru přímky  $AB$  do roviny  $\rho =$  přímky  $PQ$ :  $y = 1$  .

$$z = 2 + t, t \in R$$

**Př. 6:** Urči vzájemnou polohu přímky  $p = \{[1+t; 2-2t; 3+3t], t \in R\}$  a roviny  $\rho = \{[1-s+2r; 2+2s; 3-r], s, r \in R\}$ .

Rovina je dána parametricky  $\Rightarrow$  nemáme normálový vektor. Bez něj by bylo rozhodování komplikované  $\Rightarrow$  spočítáme si ho vektorovým součinem.

$$\mathbf{u}_\rho = (-1; 2; 0) - 1; 2 \Rightarrow \mathbf{u}_\rho \times \mathbf{v}_\rho = (-2 - 0; 0 - 1; 0 - 4) = (-2; -1; -4) \Rightarrow \mathbf{n}_\rho = (2; 1; 4)$$

$$\mathbf{v}_\rho = (2; 0; -1) 2; 0$$

Skalární součin  $\mathbf{n}_\rho = (2; 1; 4)$  a  $\mathbf{u}_p = (1; -2; 3)$ :

$$\mathbf{n}_\rho \cdot \mathbf{u}_p = (2; 1; 4) \cdot (1; -2; 3) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 = 12$$

$\Rightarrow$  přímka  $p$  je s rovinou  $\rho$  různoběžná.

**Pedagogická poznámka:** Hodně studentů počítá ještě i průsečík. Připomínám jim, že se zbytečně zdržují, protože v zadání takový požadavek není a pro určení vzájemné polohy průsečík nepotřebujeme.

**Př. 7:** Urči hodnoty parametrů  $a, b$  tak, aby přímka  $p = \{[1-t; a-2t; 2+2t], t \in R\}$  ležela v rovině  $\rho: 2x + by - z + 4 = 0$ .

Přímka  $p$  leží v rovině  $\rho$ :

- přímka  $p$  je s rovinou  $\rho$  rovnoběžná  $\Rightarrow$  směrový vektor přímky  $\mathbf{u} = (-1; -2; 2)$  je kolmý na normálový vektor roviny  $\mathbf{n} = (2; b; -1)$ :  
 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = (-1; -2; 2)(2; b; -1) = -2 - 2b - 2 = 0 \Rightarrow b = -2$
- libovolný bod přímky  $p$  leží v rovině  $\rho \Rightarrow$  dosadíme bod  $A[1; a; 2]$  do rovnice roviny  $\rho: 2 \cdot 1 - 2 \cdot a - 2 + 4 = 0 \Rightarrow a = 2$ .

Zadání úlohy splňuje přímka  $p = \{[1-t; 2-2t; 2+2t], t \in R\}$  a rovina  $\rho: 2x - 2y - z + 4 = 0$ .

**Př. 8:** Urči společné body roviny  $\rho: 2x - y + z + 1 = 0$  a přímky  $p = \{[1+t; 1+4t; -2+2t], t \in R\}$ . Z počtu nalezených bodů urči vzájemnou polohu.

$$2x - y + z + 1 = 0$$

Hledáme společné body  $\Rightarrow$  řešíme soustavu rovnic:

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+4t \\ z = -2+2t \end{cases}$$

Dosadíme do první rovnice:  $2(1+t) - (1+4t) + (-2+2t) + 1 = 0$

$$2 + 2t - 1 - 4t - 2 + 2t + 1 = 0$$

$0 = 0 \Rightarrow$  Rovina  $\rho$  má s přímkou  $p$  nekonečně mnoho společných bodů  $\Rightarrow$  přímka  $p$  leží v rovině  $\rho$ .

**Př. 9:** Petáková:  
strana 117/cvičení 33  
strana 117/cvičení 35  
strana 117/cvičení 36 a) c)

**Shrnutí:** Vzájemnou polohu přímky a roviny určíme pomocí směrového vektoru přímky a normálového vektoru roviny (skalárním součinem).