

7.4.7 Polohové úlohy v prostoru II

Předpoklady: 7406

Př. 1: Urči vzájemnou polohu rovin $\rho: 2x - 4y + 2z - 4 = 0$ a $\sigma: 3x - 6y + 3z - 9 = 0$.

Roviny mohou být v prostoru rovnoběžné, totožné nebo různoběžné (podobně jako přímky v rovině).

Upravíme rovnice tak, aby před x byla jednička.

$$\begin{array}{ll} \rho: 2x - 4y + 2z - 4 = 0 & \sigma: 3x - 6y + 3z - 9 = 0 \\ \rho: x - 2y + z - 2 = 0 & \sigma: x - 2y + z - 3 = 0 \end{array}$$

Rovnice obou rovin se liší v koeficientu $d \Rightarrow$ roviny jsou rovnoběžné (mají stejný směr, ale nejde o shodné roviny).

Př. 2: Urči zbývající koeficienty v rovnicích rovin ρ a σ , tak aby byly totožné.

$$\rho: 2x + by + 3z - 2 = 0, \quad \sigma: ax + 5y - 2z + d = 0.$$

Roviny jsou totožné, když jejich obecné rovnice jsou jedna druhé násobkem.

$$\begin{array}{llll} a_{\rho}x = k \cdot a_{\sigma}x & b_{\rho}y = k \cdot b_{\sigma}y & c_{\rho}z = k \cdot c_{\sigma}z & d_{\rho} = k \cdot d_{\sigma} \\ 2 = k \cdot a_{\sigma} & b_{\rho} = k \cdot 5 & 3 = k \cdot (-2) & -2 = k \cdot d_{\sigma} \\ & & k = -\frac{3}{2} & \end{array}$$

Známe poměr obou rovnic \Rightarrow dopočítáme ostatní koeficienty:

$$a_{\sigma} = \frac{2}{k} = \frac{2}{-\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3} \quad b_{\rho} = k \cdot 5 = -\frac{3}{2} \cdot 5 = -\frac{15}{2} \quad d_{\sigma} = \frac{-2}{k} = \frac{-2}{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Rovnice rovin: } \rho: 2x - \frac{15}{2}y + 3z - 2 = 0 \quad \sigma: -\frac{4}{3}x + 5y - 2z + \frac{4}{3} = 0.$$

Př. 3: Urči vzájemnou polohu rovin $\rho: 2x - 4y + 2z - 4 = 0$ a $\sigma: 2x - 3y + 3z - 3 = 0$.

Pokud jsou roviny různoběžné najdi jejich průsečnici.

Rovnice rovin nejsou svými násobky.

Vypíšeme si normálové vektory: $\mathbf{n}_{\rho} = (2; -4; 2)$ $\mathbf{n}_{\sigma} = (2; -3; 3)$

\Rightarrow normálové vektory nemají stejný směr \Rightarrow roviny jsou různoběžné \Rightarrow mají průsečnici (množinu společných bodů) \Rightarrow řešíme soustavu rovnic (hledáme společné body):

$$2x - 4y + 2z - 4 = 0$$

$$2x - 3y + 3z - 3 = 0$$

$$\hline 2x - 4y + 2z - 4 = 0$$

$$\underline{[1] - [2]} \quad -y - z - 1 = 0$$

Dvě rovnice a tři neznámé \Rightarrow nekonečně mnoho řešení (přímka má nekonečně mnoho bodů)

\Rightarrow jednu neznámou volíme (například z) a ostatní vyjadřujeme pomocí zvolené neznámé:

z druhé rovnice: $y = -1 - z$.

První rovnice: $2x - 4y + 2z - 4 = 0 \quad / : 2$.

$x - 2y + z - 2 = 0$ dosadíme $y = -1 - z$:

$$x - 2(-1 - z) + z - 2 = 0$$

$$x + 2 + 2z + z - 2 = 0$$

$$x = -3z$$

Řešením soustavy je množina bodů $K = \{[-3z; -1 - z; z], z \in R\}$: Řešení nevypadá jako vyjádření přímky. Stačí položit $z = t$: $K = \{[-3t; -1 - t; t], t \in R\}$ - to už odpovídá tomu, co si pod parametrickým vyjádřením přímky představujeme.

Dodatek: Správnost řešení předchozího příkladu si můžeme ověřit dosazením do rovnic obou rovin (měly bychom získat nekonečně mnoho řešení, protože průsečnice musí ležet v obou rovinách).

$$\rho: 2x - 4y + 2z - 4 = 0$$

$$2(-3t) - 4(-1 - t) + 2t - 4 = 0$$

$$-6t + 4 + 4t + 2t - 4 = 0$$

$$0 = 0 \Rightarrow \text{průsečnice leží v rovině } \rho.$$

$$\sigma: 2x - 3y + 3z - 3 = 0$$

$$2(-3t) - 3(-1 - t) + 3t - 3 = 0$$

$$-6t + 3 + 3t + 3t - 3 = 0$$

$$0 = 0 \Rightarrow \text{průsečnice leží v rovině } \sigma.$$

Př. 4: Najdi společné body rovin $\rho: \{[1+t-s; 2-t+2s; -1+s], t, s \in R\}$ a $\sigma: x + y - z - 4 = 0$. Na základě výsledku rozhodni o vzájemné poloze rovin ρ a σ .

$$x = 1 + t - s$$

$$y = 2 - t + 2s$$

$$z = -1 + s$$

Hledáme společné body \Rightarrow řešíme soustavu rovnic:

$$x + y - z - 4 = 0$$

Dosadíme z prvních tří rovnic do čtvrté: $(1+t-s) + (2-t+2s) - (-1+s) - 4 = 0$

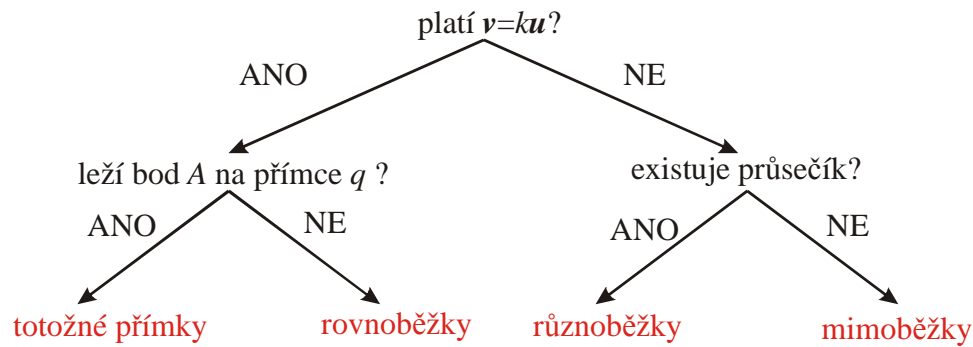
$$1 + t - s + 2 - t + 2s + 1 - s - 4 = 0$$

$$0 = 0$$

Řešením je libovolná dvojice čísel $t, s \Rightarrow$ všechny body obou rovin jsou společné \Rightarrow roviny jsou totožné.

Př. 5: Zopakuj postup, kterým rozhodneš o vzájemné poloze dvou parametricky zadaných přímek $p(A; \mathbf{u})$ a $q(B; \mathbf{v})$ v prostoru.

Podobně jako u vzájemné polohy dvou přímek v rovině, přibude možnost mimoběžnosti přímek \Rightarrow pokud nebudou přímky rovnoběžné, musíme zjistit, zda existuje průsečík, a podle toho rozhodneme, zda jsou různoběžné nebo mimoběžné.



Př. 6: Je dána přímka $p(P; \mathbf{u}_p)$, $P[1; 2; -1]$, $\mathbf{u}_p = (2; -1; 1)$. Urči postupně vzájemnou polohu přímky p a přímek:

a) $a: \{[2-4t; 3+2t; 3-2t], t \in R\}$

$$x = -1 - 2t$$

c) $c: y = 3 + t$

$$z = -2 - t, t \in R$$

b) $b(B; \mathbf{u}_b)$, $B[-1; 2; 1]$, $\mathbf{u}_b = (1; 1; -2)$

d) $d: \{[-1+2t; -1+t; -2+t], t \in R\}$

a) $a: \{[2-4t; 3+2t; 3-2t], t \in R\}$

Porovnáme směrové vektory: $\mathbf{u}_p = (2; -1; 1)$ $\mathbf{u}_a = (-4; 2; -2)$.

Platí: $\mathbf{u}_a = -2 \cdot \mathbf{u}_p \Rightarrow$ přímky jsou rovnoběžné nebo totožné.

Zjistíme, zda bod $P[1; 2; -1]$ leží na přímce a :

$$1 = 2 - 4t \Rightarrow t = \frac{1}{4}$$

$$2 = 3 + 2t \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{bod } P \text{ neleží na přímce } a \Rightarrow \text{přímky } p \text{ a } a \text{ jsou rovnoběžné.}$$

$$-1 = 3 - 2t \Rightarrow t = 2$$

b) $b(B; \mathbf{u}_b)$, $B[-1; 2; 1]$, $\mathbf{u}_b = (1; 1; -2)$

Porovnáme směrové vektory: $\mathbf{u}_p = (2; -1; 1)$ $\mathbf{u}_b = (1; 1; -2)$.

Neplatí $\mathbf{u}_b = k \cdot \mathbf{u}_p \Rightarrow$ přímky jsou různoběžné nebo mimoběžné.

Hledáme průsečík:

$$1 + 2t = -1 + s$$

$$2 - t = 2 + s$$

$$\underline{-1 + t = 1 - 2s}$$

$$2t - s = -2$$

$$-t - s = 0 \Rightarrow s = -t \quad \text{Dosadíme do obou zbývajících rovnic:}$$

$$\underline{t + 2s = 2}$$

$$2t - (-t) = -2 \Rightarrow t = -\frac{2}{3} \Rightarrow \text{soustava nemá řešení} \Rightarrow \text{neexistuje průsečík přímek } p \text{ a } b \Rightarrow$$

$$t + 2(-t) = -2 \Rightarrow t = 2$$

přímky p a b jsou mimoběžné.

$$x = -1 - 2t$$

c) $c: y = 3 + t$

$$z = -2 - t, t \in R$$

porovnáme směrové vektory: $\mathbf{u}_p = (2; -1; 1)$ $\mathbf{u}_c = (-2; 1; -1)$.

Platí: $\mathbf{u}_c = -1 \cdot \mathbf{u}_p \Rightarrow$ přímky jsou rovnoběžné nebo totožné.

Zjišťujeme, zda bod $P[1; 2; -1]$ leží na přímce c :

$$1 = -1 - 2t \Rightarrow t = -1$$

$$2 = 3 + t \Rightarrow t = -1 \Rightarrow \text{bod } P \text{ leží na přímce } c \Rightarrow \text{přímky } p \text{ a } c \text{ jsou totožné.}$$

$$-1 = -2 - t \Rightarrow t = -1$$

d) $d: \{[-1 + 2t; -1 + t; -2 + t], t \in R\}$

Porovnáme směrové vektory: $\mathbf{u}_p = (2; -1; 1)$ $\mathbf{u}_d = (2; 1; 1)$.

Neplatí: $\mathbf{u}_d = k \cdot \mathbf{u}_p \Rightarrow$ přímky jsou různoběžné nebo mimoběžné.

Hledáme průsečík:

$$1 + 2t = -1 + 2s$$

$$2 - t = -1 + s$$

$$\frac{-1 + t = -2 + s}{2t - 2s = -2}$$

$$2t - 2s = -2$$

$$-t - s = -3$$

Dosadíme do zbývajících rovnic:

$$\frac{t - s = -1 \Rightarrow t = s - 1}{2(s - 1) - 2s = -2}$$

$$2(s - 1) - 2s = -2$$

$$\frac{-(s - 1) - s = -3}{0 = 0}$$

$$0 = 0$$

$$\Rightarrow t = s - 1 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow \text{průsečík existuje.}$$

$$-2s = -4 \Rightarrow s = 2$$

Dopočítáme souřadnice průsečíku:

$$x = 1 + 2t = 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

$$y = 2 - t = 2 - 1 = 1 \Rightarrow \text{průsečík má souřadnice } Q[3; 1; 0].$$

$$z = -1 + t = -1 + 1 = 0$$

Přímky p a d jsou mimoběžné.

Př. 7: Petáková:

strana 118/cvičení 37 a)

strana 118/cvičení 38

strana 118/cvičení 39

strana 118/cvičení 40

Shrnutí: