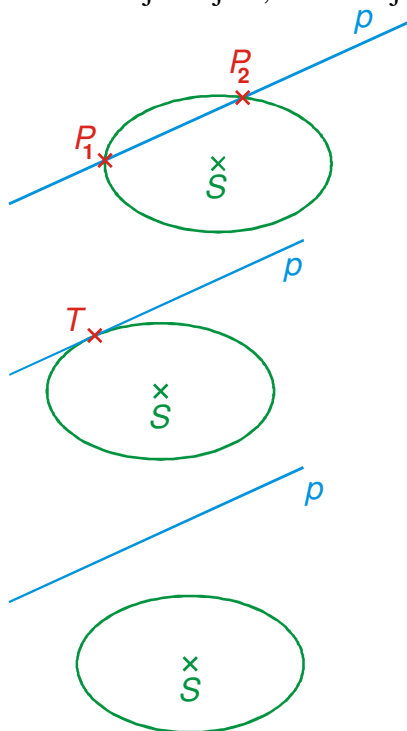


7.5.11 Elipsa a přímka

Předpoklady: 7504, 7505, 7508

Př. 1: Sepiš všechny možné vzájemné polohy elipsy a přímky. Ke každému případu nakresli obrázek.

Z obrázků je zřejmé, že existují tři případy vzájemné polohy kružnice a přímky:



- Přímka se protíná s elipsou ve dvou různých bodech.
- Říkáme, že přímka je **sečnou** elipsy.
- Přímka se protíná s elipsou právě v jednom bodě.
- Říkáme, že přímka je **tečnou** elipsy.
- Přímka se neprotíná s elipsou v žádném bodě.
- Říkáme, že přímka je **vnější přímkou** elipsy.

Stejně možnosti jako u kružnice (očekávatelné, když je kružnice speciálním případem elipsy), bohužel bez speciálních vlastností (kolmost poloměru na tečnu, Thaletova kružnice...) \Rightarrow příklady musíme řešit pomocí parametrů (těžká práce).

Stejně jako u kružnice i u elipsy existuje vzorec pro tečnu v jejím bodě.

Je-li bod $X_0[x_0; y_0]$ bodem elipsy $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ má tečna této elipsy v tomto

$$\text{bodě rovnici: } \frac{(x_0 - m)(x - m)}{a^2} + \frac{(y_0 - n)(y - n)}{b^2} = 1.$$

Podobná pomůcka na zapamatování jako u tečny kružnice:

- Středová rovnice elipsy $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$.
- Rozložíme dvojčleny: $\frac{(x-m)(x-m)}{a^2} + \frac{(y-n)(y-n)}{b^2} = 1$.

- V každém součtinu zaměníme jedno x za x_0 (a jedno y za y_0):

$$\frac{(x_0 - m)(x - m)}{a^2} + \frac{(y_0 - n)(y - n)}{b^2} = 1.$$

Pedagogická poznámka: Rovnice tečny pro elipsy se středem v počátku soustavy souřadnic neuvádím schválně. Považuji ji za zbytečnou, její ekvivalent pro kružnici také nepoužíváme a zbytečně zvětšuje chaos ve studentských hlavách.

Př. 2: Urči rovnici tečny:

a) elipsy $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ v jejím bodě $X_0 \left[1; \frac{3}{2} \right]$;

b) elipsy $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$ v jejím bodě $Y \left[0; \frac{36}{5} \right]$.

V obou případech dosadíme do vzorce.

a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow \frac{(x_0 - 0)(x - 0)}{4} + \frac{(y_0 - 0)(y - 0)}{3} = 1$, dosadíme $X_0 \left[1; \frac{3}{2} \right]$.

$$\frac{1 \cdot x}{4} + \frac{\frac{3}{2} \cdot y}{3} = 1$$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1 \quad / \cdot 4$$

$$x + 2y = 4$$

$$x + 2y - 4 = 0$$

b) $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{(x_0 - 3)(x - 3)}{25} + \frac{(y_0 - 4)(y - 4)}{16} = 1$, dosadíme $Y \left[0; \frac{36}{5} \right]$.

$$\frac{(0-3)(x-3)}{25} + \frac{\left(\frac{36}{5}-4\right)(y-4)}{16} = 1$$

$$\frac{-3(x-3)}{25} + \frac{\frac{16}{5}(y-4)}{16} = 1$$

$$\frac{-3(x-3)}{25} + \frac{(y-4)}{5} = 1 \quad / \cdot 25$$

$$-3(x-3) + 5(y-4) = 25$$

$$-3x + 9 + 5y - 20 = 25$$

$$-3x + 5y - 36 = 0$$

$$3x - 5y + 36 = 0$$

Př. 3: Urči průsečíky přímky $x + y - 1 = 0$ s elipsou $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. Jaká je jejich vzájemná poloha?

Řešíme soustavu rovnic: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad / \cdot 12$
 $x + y - 1 = 0$

$$\begin{array}{l} 3x^2 + 4y^2 = 12 \\ y = 1 - x \end{array} \quad (\text{dosadíme do první rovnice})$$

$$3x^2 + 4(1-x)^2 = 12$$

$$3x^2 + 4(1 - 2x + x^2) = 12$$

$$3x^2 + 4 - 8x + 4x^2 = 12$$

$$7x^2 - 8x - 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-8)}}{2 \cdot 7} = \frac{8 \pm 4\sqrt{18}}{2 \cdot 7} = \frac{4 \pm 6\sqrt{2}}{7}$$

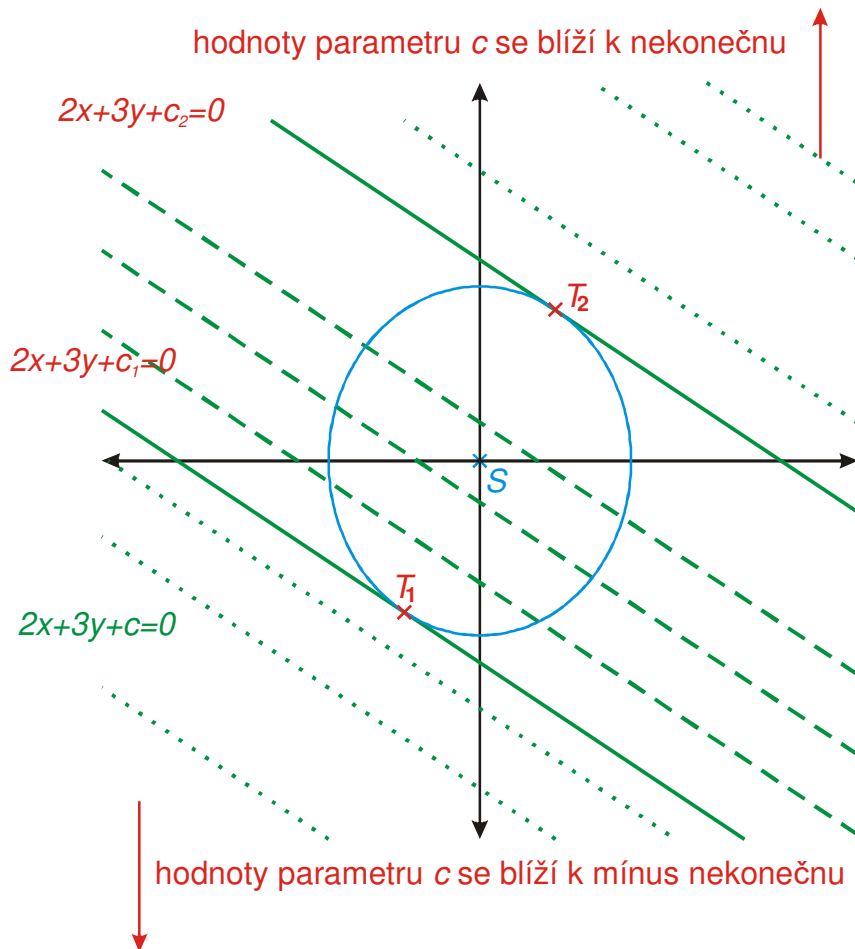
$$\bullet \quad x_1 = \frac{4 + 6\sqrt{2}}{7} \Rightarrow y_1 = 1 - x_1 = 1 - \frac{4 + 6\sqrt{2}}{7} = \frac{3 - 6\sqrt{2}}{7}$$

$$\bullet \quad x_2 = \frac{4 - 6\sqrt{2}}{7} \Rightarrow y_2 = 1 - x_2 = 1 - \frac{4 - 6\sqrt{2}}{7} = \frac{3 + 6\sqrt{2}}{7}$$

Přímka $x + y - 1 = 0$ má s elipsou $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ dva společné body $P_1 \left[\frac{4 + 6\sqrt{2}}{7}; \frac{3 - 6\sqrt{2}}{7} \right]$ a

$P_2 \left[\frac{4 - 6\sqrt{2}}{7}; \frac{3 + 6\sqrt{2}}{7} \right]$ a je tedy její sečnou.

Př. 4: Urči jak závisí vzájemná poloha elipsy $4x^2 + 3y^2 - 16 = 0$ a přímky $2x + 3y + c = 0$ na hodnotě parametru c . Ještě než začneš příklad řešit početně, nakresli si náčrtek a co nejpřesněji odhadni, jak bude početní řešení příkladu vypadat.



Z obrázku vidíme, že stejně jako odpovídajícího příkladu s kružnicí nastanou celkem tři případy (postupně od nejmenších hodnot parametru c):

$c \in (-\infty; c_1)$ nebo $c \in (c_2; \infty)$: přímka se s elipsou neprotíná, je její vnější přímkou.

$c = c_1$ nebo $c = c_2$: přímka je tečnou elipsy.

$c \in (c_1; c_2)$: přímka protíná elipsu ve dvou bodech, je její sečnou.

Nyní řešíme příklad početně.

Hledáme průsečíky přímky s kružnicí \Rightarrow body, které vyhovují oběma rovnicím \Rightarrow řešíme

$$\begin{aligned} \text{soustavu rovnic} \quad & 4x^2 + 3y^2 - 16 = 0 \\ & 2x + 3y + c = 0 \end{aligned} \Rightarrow \text{stejný postup jako v příkladě s kružnicí.}$$

Trochu si usnadníme výpočet: $(2x)^2 + 3y^2 - 16 = 0$

$$2x = -3y - c$$

Teď dosadíme z druhé rovnice do první rovnice rovnou za $2x$:

$$(-3y - c)^2 + 3y^2 - 16 = 0 \quad (\text{mínus se při umocňování ztratí})$$

$$(3y + c)^2 + 3y^2 - 16 = 0$$

$$9y^2 + 6yc + c^2 + 3y^2 - 16 = 0$$

$$12y^2 + 6yc + c^2 - 16 = 0 \Rightarrow \text{kvadratická rovnice s parametrem.}$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6c \pm \sqrt{(6c)^2 - 4 \cdot 12 \cdot (c^2 - 16)}}{2 \cdot 12}$$

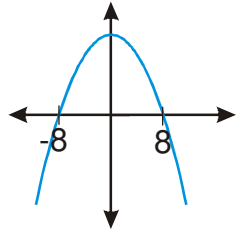
$$y_{1,2} = \frac{-6c \pm \sqrt{36c^2 - 48 \cdot c^2 + 48 \cdot 16}}{24} = \frac{-6c \pm \sqrt{48 \cdot 16 - 12c^2}}{24}$$

O existenci kořenů rozhoduje znaménko výrazu pod odmocninou

\Rightarrow řešíme nerovnici $48 \cdot 16 - 12c^2 \geq 0 \quad / :12$.

$$-(c^2 - 64) = -(c - 8)(c + 8) \geq 0$$

„obrácená“ parabola, průsečíky pro $c = -8$ a $c = 8$



Z obrázku je vidět, že mohou nastat tři možnosti:

1. $c \in (-8; 8) \Rightarrow$ diskriminant rovnice $D = 64 - c^2 > 0$

Rovnice pro nalezení průsečíků elipsy s přímkou má dva kořeny \Rightarrow elipsa se protíná s přímkou ve dvou bodech, přímka je její sečnou.

2. $c = -8$ nebo $c = 8 \Rightarrow$ diskriminant rovnice $D = 64 - c^2 = 0$

Rovnice pro nalezení průsečíků elipsy s přímkou má jeden kořen \Rightarrow elipsa se protíná s přímkou v jednom bodě, přímka je její tečnou.

Tečné body můžeme spočítat:

- $c = 8 \quad y_{1,2} = \frac{-6 \cdot 8 \pm 0}{24} = -2 \Rightarrow 2x = -3y - c = -3(-2) - 8 = -2 \Rightarrow x = -1$
 $\Rightarrow T_1[-1; -2]$

- $c = -8 \quad y_{1,2} = \frac{-6 \cdot (-8) \pm 0}{24} = 2 \Rightarrow 2x = -3y - c = -3(2) - (-8) = 2 \Rightarrow x = 1$
 $\Rightarrow T_2[1; 2]$

3. $c \in (-\infty; -8) \cup (8; \infty) \Rightarrow$ diskriminant rovnice $D = 64 - c^2 < 0$

Rovnice pro nalezení průsečíků elipsy s přímkou nemá žádný kořen \Rightarrow elipsa se s přímkou neprotíná, přímka je její vnější přímkou.

Př. 5: Najdi tečny elipsy $5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$ procházející bodem $A[0; -3]$.

Napíšeme si všechny přímky procházející bodem $A[0; -3]$:

$(y - y_0) = k(x - x_0) \Rightarrow (y + 3) = kx$, přímku $x = 0$ nemusíme sledovat, je určitě sečnou elipsy $5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$.

Z rovnice přímky $(y + 3) = kx$ vyjádříme $y = kx - 3$ a dosadíme do rovnice elipsy:

$$5x^2 + 9(kx - 3)^2 - 45 = 0$$

$$5x^2 + 9(k^2x^2 - 6kx + 9) - 45 = 0$$

$$5x^2 + 9k^2x^2 - 54kx + 81 - 45 = 0$$

$$(5 + 9k^2)x^2 - 54kx + 36 = 0$$

Hledáme tečny \Rightarrow zajímáme se o nulový diskriminant, řešit zbytek kvadratické rovnice je zbytečné:

$$D = b^2 - 4ac = (-54k)^2 - 4(5 + 9k^2)36 = 2916k^2 - 1296k^2 - 720 = 0$$

$$1620k^2 - 720 = 0$$

$$k^2 = \frac{720}{1620} = \frac{72}{162} = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}$$

$$\bullet \quad k_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow t_1: y = \frac{2}{3}x - 3 \Rightarrow t_1: 2x - 3y - 9 = 0$$

$$\bullet \quad k_2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow t_2: y = -\frac{2}{3}x - 3 \Rightarrow t_2: 2x + 3y + 9 = 0$$

Př. 6: Petáková:

strana 130/cvičení 90 d)

strana 130/cvičení 92 a)

strana 130/cvičení 94 b)

strana 131/cvičení 95 b)

strana 131/cvičení 96 d)

Shrnutí: Vzorec pro rovnici tečny elipsy je analogický vzorci pro tečnu kružnice. Ostatní příklady řešíme stejně jako u kružnice bez využívání speciálních vlastností.