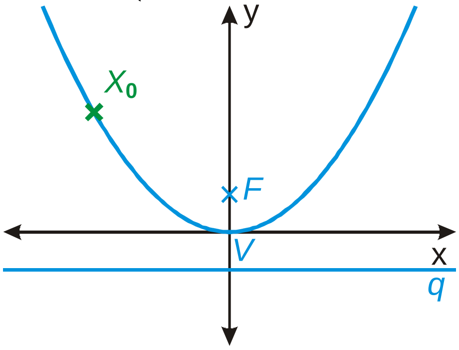
7.5.15 Parabola a přímka

Předpoklady: 7505, 7506, 7511, 7512, 7513

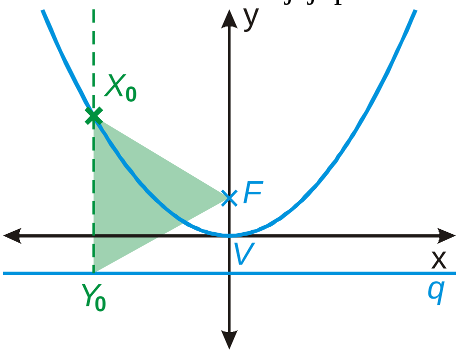
Pedagogická poznámka: Na probrání celého obsahu je třeba tak jeden a půl vyučovací hodiny. Pokud tolik času nemáte, je potřeba buď rychle proběhnout úvodní část nebo vynechat poslední příklad a zadat ho na domácí přípravu.

Čeká nás poslední hodina o parabolách a stále ještě nevíme, proč se satelitní anténě říká parabola $\Rightarrow$ nejvyšší čas rozřešit tuto záhadu.

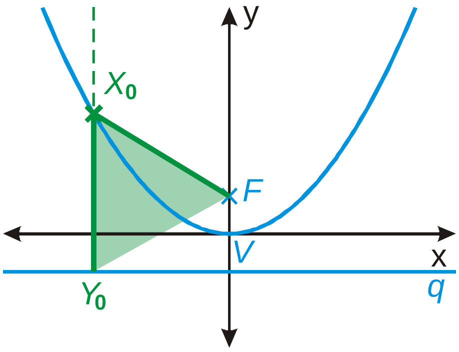
Př. 1: Na obrázku je nakreslena parabola $x^2 = 2py$ s ohniskem F, řídící přímkou q a vrcholem $V[0;0]$. Bod $X_0[x_0;y_0]$ je libovolný bod paraboly různý od vrcholu. Označ patu kolmice vedené bodem X_0 na přímku q jako Y_0. Rozhodni na základě vlastností paraboly, zda vzniklý trojúhelník X_0FY_0 je obecný nebo má speciální vlastnosti (rovnostrannost, rovnoramennost, pravoúhlost …).



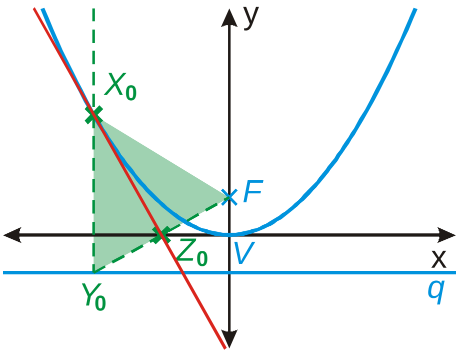
Dokreslíme kolmici a její patu do obrázku:



Z definice paraboly vyplývá: $|X_0F| = |X_0q| = |X_0Y_0|$ $\Rightarrow$ trojúhelník X_0FY_0 je rovnoramenný se základnou Y_0F .

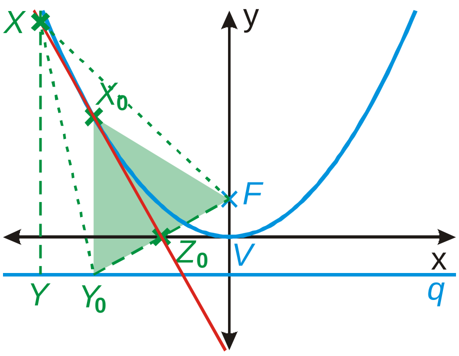


Př. 2: (BONUS) Střed úsečky FY_0 z předchozího příkladu označ Z_0. Odhadni a poté dokaž, kolik společných bodů má přímka X_0Z_0 s parabolou $x^2 = 2py$.



Podle obrázku se zdá, že nakreslená přímka má s parabolou jediný společný bod X_0 a je její tečnou.

Důkaz je jednoduchý. Nakreslíme si libovolný bod přímky Z_0X_0 různý od X_0.



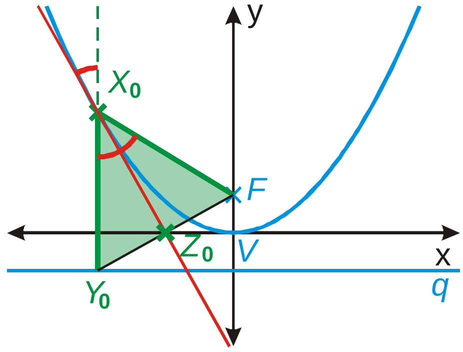
Trojúhelník X_0FY_0 je rovnoramenný $\Rightarrow$ přímka Z_0X_0 je jeho osou a tedy i osou strany FY_0 $\Rightarrow$ všechny body této přímky jsou stejně vzdálené od krajních bodů F a Y_0 $\Rightarrow$ $|XF| = |XY_0|$.

Zkontrolujeme, zda bod X splňuje podmínku pro bod paraboly: $|XF| = |Xq| = |XY|$.

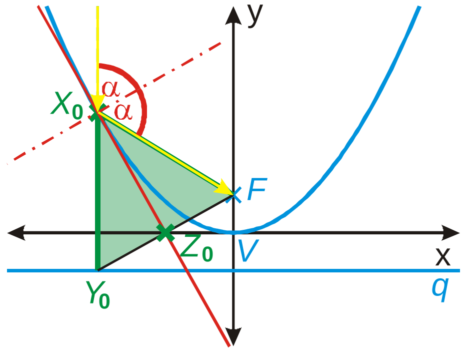
Z obrázku je vidět, že platí: $|XY| < |XY_0| = |XF|$ $\Rightarrow$ $|Xq| < |XF|$ $\Rightarrow$ bod X určitě není bodem paraboly.

Proč jsme to všechno dělali?
1. Z našeho obrázku už je možné snadno odvodit rovnici tečny paraboly.
2. Teď už snadno ukážeme, proč chytáme satelit pomocí parabol.

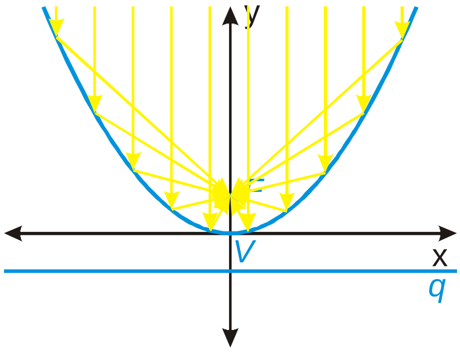
Přímka Z_0X_0 je osou trojúhelníku $\Rightarrow$ dělí úhel Y_0X_0F na dvě stejné poloviny $\Rightarrow$ všechny tři vyznačené úhly jsou stejné (věta o vrcholových úhlech).



Protože tečna udává směr paraboly v bodě X_0, udává i rovinu, od které se odráží paprsek, který v tomto místě dopadne na parabolu. Vyznačené úhly pak ukazují, že paprsek rovnoběžný s osou paraboly se odrazí do jejího ohniska.



Bod X_0 jsme volili libovolně $\Rightarrow$ pravidlo o odrazu platí pro všechny body paraboly.



Parabola u satelitu soustřeďuje paprsky signálu (které pocházejí z velmi vzdáleného zdroje a tak jsou prakticky rovnoběžné) do svého ohniska (kde je namontovaný přijímač).
Obráceně funguje parabola u reflektorů. V ohnisku parabolického zrcadla je umístěna žárovka a parabolické zrcadlo odráží paprsky z žárovky do vodorovného proudu světla.

Vrátíme se k tečnám paraboly. Nebudeme si je odvozovat z předchozích obrázků, použijeme nápodobu s tečnami elipsy a kružnice.
Hledáme tečnu paraboly $(x-m)^2 = 2p(y-n)$ v bodě $X[x_0; y_0]$, který na ní leží.

- Rovnice paraboly ve vrcholovém tvaru: $(x-m)^2 = 2p(y-n)$.
- Rozložíme závorky s neznámými: $(x-m)(x-m) = p(y-n)+p(y-n)$ (závorku na pravé straně nemůžeme rozložit na součin, protože není na druhou. Můžeme ji však napsat jako součet, protože je násobená dvěma).
- Vždy jednu neznámou nahradíme souřadnicí bodu X_0: $(x_0-m)(x-m) = p(y_0-n)+p(y-n)$.

Kupodivu to funguje.

Pedagogická poznámka: Pro „odvození“ rovnice tečny u paraboly jsem zvolil předchozí postup ze těchto důvodů:
Klasické odvození je dlouhé, studenti ho příliš nesledují a sami ho nejsou schopni provést. Zbývá tak málo času na počítání příkladů.
Klasicky se odvozuje pouze rovnice pro speciální polohu paraboly s vrcholem

v počátku soustavy souřadnic.
Pro čtyři různé tvary vrcholové rovnice, máme čtyři různé tvary rovnice tečny $\Rightarrow$ považuji za užitečnější ukázat postup, jak získávat tyto rovnice z rovnic parabol, aby se studenti zbytečně nesnažili zapamatovat si čtyři vzorce.

Pro každý z druhů paraboly existuje odpovídající rovnice tečny v jejím bodě $X_0[x_0;y_0]$:

$(x-m)^2 = 2p(y-n) \quad \Rightarrow \quad (x_0-m)(x-m) = p(y_0-n)+p(y-n)$

$(x-m)^2 = -2p(y-n) \quad \Rightarrow \quad (x_0-m)(x-m) = -p(y_0-n)-p(y-n)$

$(y-n)^2 = 2p(x-m) \quad \Rightarrow \quad (y_0-n)(y-n) = p(x_0-m)+p(x-m)$

$(y-n)^2 = -2p(x-m) \quad \Rightarrow \quad (y_0-n)(y-n) = -p(x_0-m)-p(x-m)$

Př. 3: Najdi rovnici tečny dané paraboly v daném bodě:
a) $(x+1)^2 = 4(y+2)$; $X_0[1;?]$ b) $y^2=-x$; $X_0[?;2]$.
Správnost dosazení ověř výpočtem průsečíků přímky s parabolou.

a) $(x+1)^2 = 4(y+2)$ $X_0[1;?]$

Určíme druhou souřadnici bodu X_0: $(1+1)^2 = 4(y+2)$.

$4 = 4(y+2)$

$y+2=1 \Rightarrow y=-1$

Hledáme tečnu paraboly $(x+1)^2 = 4(y+2)$ v bodě $X_0[1;-1]$.

Vzorec pro tečnu: $(x_0+1)(x+1) = 2(y+2)+2(y_0+2)$.

Dosadíme bod $X_0[1;-1]$: $(1+1)(x+1) = 2(y+2)+2(-1+2)$.

$2x+2 = 2y+4+2$

$2x-2y-4=0$

Rovnice tečny: $x-y-2=0$.

Určíme společné body dosazením, z rovnice tečny vyjádříme *y*: $y=x-2$.

Dosadíme do rovnice paraboly: $(x+1)^2 = 4([x-2]+2)$.

$x^2+2x+1=4x$

$x^2-2x+1=(x-1)^2=0$ $\Rightarrow$ jediný průsečík s *x*-vou souřadnicí $x=1$ (bod ze zadání).

b) $y^2=-x$ $X_0[?;2]$

Určíme druhou souřadnici bodu X_0: $2^2=-x \Rightarrow x=-4$.

Hledáme tečnu paraboly $(y-0)^2 = -2\frac{1}{2}(x-0)$ v bodě $X_0[-4;2]$.

Vzorec pro tečnu: $(y_0-0)(y-0) = -\left(\frac{x}{2}-0\right)-\left(\frac{x_0}{2}-0\right)$.

Dosadíme bod $X_0[-4;2]$: $2y = -\frac{x}{2}-\frac{-4}{2}$.

$2y = -\frac{x}{2} + 2 \quad / \cdot 2$

$4y = -x + 4$

Tečná má rovnici: $x + 4y - 4 = 0$.

Určíme společné body dosazením, z rovnice tečny vyjádříme *x*: $x = 4 - 4y$.

Dosadíme do rovnice paraboly: $y^2 = -(4 - 4y)$.

$y^2 - 4y + 4 = 0$

$(y-2)^2 = 0 \Rightarrow$ jediný průsečík s *y*-ovou souřadnicí $y = 2$ (bod ze zadání).

Poznámka: Rovnici tečny v bodě b) můžeme samozřejmě zapisovat rovnou bez dosazování souřadnic počátku $[0;0]$ takto: $y^2 = -x \Rightarrow yy_0 = -\frac{x}{2} - \frac{x_0}{2}$.

Pedagogická poznámka: Části studentů bude působit obrovské problémy dopočítání zbývající souřadnice. Tuto část příkladu je lepší odtajnit brzo.

Př. 4: Urči vzájemnou polohu paraboly $x^2 - 4x - y + 1 = 0$ a přímky $x - y - 3 = 0$.

Vzájemná poloha $\Rightarrow$ určíme průsečíky $\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic: $\begin{array}{r} x^2 - 4x - y + 1 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{array}$.

Nejjednodušší je vyjádřit z druhé rovnice *y* a dosadit do první (je tam pouze jedenkrát):

$x - y - 3 = 0 \Rightarrow y = x - 3$.

$x^2 - 4x - y + 1 = x^2 - 4x - (x-3) + 1 = 0$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x-4)(x-1) = 0 \Rightarrow$ dva kořeny:

- $x_1 = 4 \Rightarrow y_1 = x_1 - 3 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow P_1[4;1]$
- $x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = x_2 - 3 = 1 - 3 = -2 \Rightarrow P_2[1;-2]$

Přímka má s parabolou dva průsečíky $P_1[4;1]$ a $P_2[1;-2]$, je tedy její sečnou.

Př. 5: Je dána parabola $(y-2)^2 = 2(x-1)$. Najdi tečny této paraboly procházející bodem $X[-3;1]$.

Bod *X* neleží na parabole $\Rightarrow$ nemůžeme použít vzorce pro tečny $\Rightarrow$ stejný postup jako u ostatních kuželoseček: všechny přímky bodem *X* a z nich vybereme ty s jedním průsečíkem.

Přímky procházející bodem $X[-3;1]$: $(y-1) = k(x+3)$ a přímka $x = -3$.

Vyjádříme *y* a dosadíme do rovnice paraboly: $y = kx + 3k + 1$.

$(kx + 3k + 1 - 2)^2 = 2(x-1)$

$(kx + 3k - 1)(kx + 3k - 1) = 2x - 2$

$k^2x^2 + 3k^2x - kx + 3k^2x + 9k^2 - 3k - kx - 3k + 1 = 2x - 2$

$k^2x^2 + 6k^2x - 2kx + 9k^2 - 6k + 1 = 2x - 2$

$k^2x^2 + 6k^2x - 2kx - 2x + 9k^2 - 6k + 3 = 0$

$k^2x^2+\left(6k^2-2k-2\right)x+9k^2-6k+3=0$

Abychom mohli dosadit do vzorce, musíme prozkoumat možnost $k=0$.

Dosadíme: $0^2x^2+\left(6\cdot 0^2-2\cdot 0-2\right)x+9.0^2-6\cdot 0+3=0$.

$-2x+3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$ - jediný průsečík $\Rightarrow$ pro $k=0$ má přímka $y=kx+3k+1=1$ s parabolou jediný průsečík.

Nyní předpokládáme $k\neq 0$, určíme diskriminant rovnice:

$D=b^2-4ac=\left(6k^2-2k-2\right)^2-4\cdot k^2\left(9k^2-6k+3\right)=0$

$2^2\left(3k^2-k-1\right)^2-4\cdot k^2\left(9k^2-6k+3\right)=0 \quad / :4$

$\left(3k^2-k-1\right)\left(3k^2-k-1\right)-k^2\left(9k^2-6k+3\right)=0$

$9k^4-3k^3-3k^2-3k^3+k^2+k-3k^2+k+1-9k^4+6k^3-3k^2=0$

$-8k^2+2k+1=0$

$8k^2-2k-1=0$

$k_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 8\cdot(-1)}}{2\cdot 8}=\frac{2\pm 6}{16}$

- $k_1=\frac{2+6}{16}=\frac{1}{2} \Rightarrow$ tečna $(y-1)=\frac{1}{2}(x+3) \quad /\cdot 2$

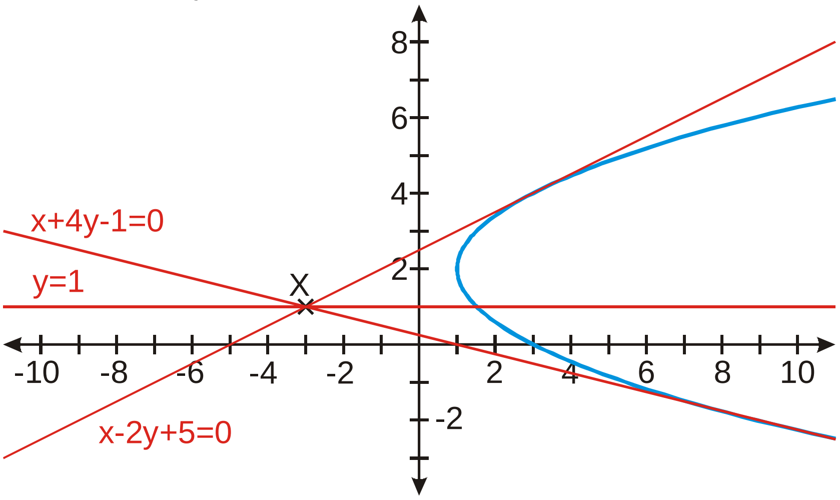
  $2y-2=x+3 \Rightarrow x-2y+5=0$
- $k_2=\frac{2-6}{16}=-\frac{1}{4} \Rightarrow$ tečna $(y-1)=-\frac{1}{4}(x+3) \quad /\cdot 4$

  $4y-4=-x-3 \Rightarrow x+4y-1=0$

Výsledek není úplně bez problémů. Očekávali jsme dvě tečny, ale vyšly nám tři přímky:

- $y=1$
- $x-2y+5=0$
- $x+4y-1=0$

Kde se stala chyba? Nakreslíme si obrázek:



Přímka $y=1$ rozhodně nevypadá jako tečna, i když má s parabolou pouze jeden průsečík, za tečnu ji nepovažujeme (asi bychom potřebovali přesnější definici tečny, ale nebudeme to zatím řešit).

$\Rightarrow$ Každým bodem, který se nachází ve vnější oblasti paraboly, procházejí tří přímky, které mají s parabolou jediný společný bod:

- dvě tečny,
- přímka rovnoběžná s osou paraboly.

Př. 6: Petáková:
strana 129/cvičení 81 c)
strana 129/cvičení 84 b)
strana 130/cvičení 87
strana 129/cvičení 92 d)
strana 129/cvičení 94 a)

Shrnutí: Z bodu ležícího ve vnější oblasti paraboly je k parabole možné sestrojit tři přímky s jediným společným bodem, kromě dvou tečen i rovnoběžku s osou paraboly. Ostatní vztahy mezi přímkou a parabolou jsou analogické situaci u elips.