8.1.1 Posloupnosti

Předpoklady: 2104

Začínáme návratem do blahých časů nevědomosti prvního ročníku. Co je funkce?

Funkce na množině $A \subset R$ je předpis, který každému číslu z množiny *A* přiřazuje právě jedno reálné číslo. Množinu *A* nazýváme **definiční obor funkce**.

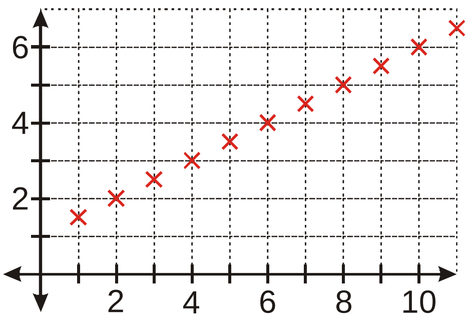
Proč musí přiřazovat právě jedno číslo? Chceme, aby přiřazování bylo jednoznačné $\Rightarrow$ z jednoho čísla nesmí vést více cest.

Pedagogická poznámka: S řešení následujících příkladů by neměli studenti strávit více než 15 minut, aby nebylo nutné v další části hodiny příliš pospíchat. Nejdůležitějším okamžikem hodiny je příklad 7, kdy žáci cvičí orientaci v posloupnosti. V hodině rozdělím třídu na tři skupiny, každá řeší příklady 1-3 v jiném pořadí (1, 2, 3 nebo 2, 3, 1 nebo 3, 1, 2).

Zkusíme si prozkoumat několik funkcí.

Př. 1: Je dána funkce $f(x) = 1 + 0,5x$, $x \in N$. Zapiš do tabulky prvních osm funkčních hodnot této funkce. Sestroj graf této funkce.

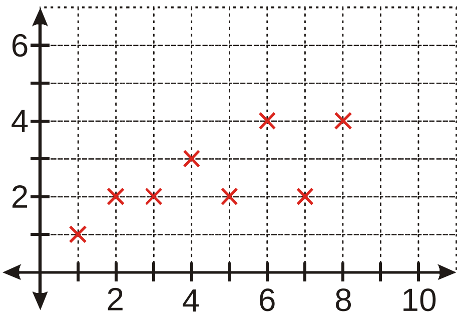
x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5



Pedagogická poznámka: Většina žáků nakreslí na první pokus graf předchozí funkce špatně, protože body spojí čárou. Neříkám jim, kde je problém, jenom je upozorním, že nemají výsledek dobře (druhou radou je, že graf neodpovídá tabulce).

Př. 2: Je dána funkce $g(x)$, $x \in \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$. Hodnotou funkce $g(x)$ je počet všech dělitelů čísla (tedy včetně jedničky a čísla *x*). Zapiš tabulku hodnot a sestroj graf funkčních hodnot této funkce.

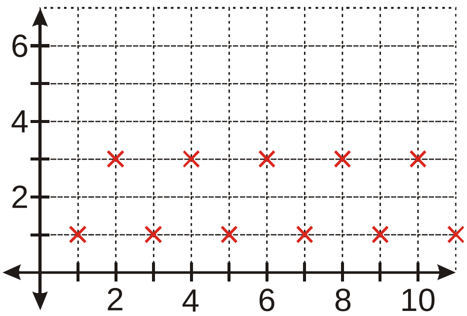
x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	2	2	3	2	4	2	4



Pedagogická poznámka: Předchozí posloupnost je zajímavá svým zadáním. Část studentů má značné problémy přiřazovat podle tohoto předpisu správné hodnoty, část dokonce nenajde zadání funkce, protože „tam není rovnice“.

Př. 3: Je dána funkce $h(x)=(-1)^x+2$, $x \in N$. Zapiš do tabulky prvních osm funkčních hodnot této funkce. Sestroj graf.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	3	1	3	1	3	1	3



Pedagogická poznámka: Posloupnost je zajímavá jako příklad „přeskakovací“ posloupnosti, jejíž hodnoty kvůli mocnině (-1) neustále přeskakují mezi dvěma čísly.

Co mají naše funkce společného?

Definiční obor je podmnožina množiny přirozených čísel, která začíná jedničkou a končí u nějakého čísla nebo pokračuje do nekonečna („nejsou v ní mezery“) $\Rightarrow$ jenom díky tomu mají význam popisy jako:

- prvních osm funkčních hodnot,
- následující hodnota,
- předchozí hodnota.

Nic takového nemůžeme říct u funkce s definičním oborem *R*.
Funkcím s takovým definičním oborem nazýváme **posloupnost**.

Jak jsou posloupnosti definovány?

- Každá funkce, jejímž definičním oborem je množina *N* všech přirozených čísel, se nazývá **nekonečná posloupnost**.
- Každá funkce, jejíž definiční obor je množina všech přirozených čísel $n \le n_0$, kde n_0 je pevně dané číslo z *N*, se nazývá **konečná posloupnost**.

Pedagogická poznámka: Následující dva příklady v hodině jako příklady nezadávám, jen si je řekneme.

Př. 4: Vysvětli, proč množina všech sudých přirozených čísel nemůže být definičním oborem nekonečné posloupnosti.

Definičním oborem nekonečné posloupnosti může být pouze množina všech přirozených čísel. V množině sudých čísel chybí lichá čísla.

Př. 5: Napiš konečnou podmnožinu množiny přirozených čísel, která nemůže být definičním oborem žádné konečné posloupnosti.

Konečná posloupnost má za definiční obor podmnožinu všech přirozených čísel menších než číslo n_0 $\Rightarrow$ každá nekompletní podmnožina nemůže být definičním oborem. Například jde o množinu $\{1;2;5\}$.

Pedagogická poznámka: Následující tabulku v hodině neopisujeme do sešitů, pouze si ji společně projdeme. Obsahuje ji i soubor s příklady, takže ji žáci vidí, když řeší příklad 6.

U posloupností používáme jiné značení i jiné pojmenování než u funkcí.

$g(4)=3$ Hodnota v bodě 4 je rovna 3.	$g_4=3$ Člen g_4 je roven 3.
$f(x)=y$ Hodnota funkce *f* v bodě *x* se rovná *y*.	$f_n=s$ *n*-tý člen posloupnosti *f* je roven *s*.
$f(x): y=(-1)^x+2, x\in N$	$\left((-1)^n+2\right)_{n=1}^{\infty}$ nebo $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_n=(-1)^n+2$

Př. 6: Pomocí formalismu pro zápis posloupnosti zapiš:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}, x\in\{1;2;3;4;5;6\}$

b) $g(x)=2^x+x, x\in N$

c) $h(x)=\dfrac{1}{x^2}, x\in\{3;4;5;6;7;8;9\}$

a) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{6}$ nebo $(f_n)_{n=1}^{6}$, $f_n=\dfrac{n}{n+1}$

b) $\left(2^n+n\right)_{n=1}^{\infty}$ nebo $(g_n)_{n=1}^{\infty}$, $g_n=2^n+n$

c) **Nejde o posloupnost.**

Dodatek: Funkci z bodu c) by přesto, že nejde o posloupnost, bylo možné zapsat ve tvaru pro posloupnosti používaném takto $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n=3}^{9}$ nebo $(h_n)_{n=3}^{9}$, $h_n=\dfrac{1}{n^2}$.

Protože první řádek v tabulkách všech posloupností je stejný (liší se pouze v délce) je možné ho vynechat a psát místo tabulky

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	2	2	3	2	4	2	4

Pouze řadu čísel: 1; 2; 2; 3; 2; 4; 2; 4.

POZOR: Čísla musíme psát ve stejném pořadí, v jakém se vyskytují v *y*-ovém řádku tabulky. Že hodnota 1,5 vznikla z jedničky víme jen díky tomu, že je uvedena první $\Rightarrow$ stejná čísla v jiném pořadí udávají jinou posloupnost.

Pokud je posloupnost nekonečná, píšeme za poslední napsanou hodnotu tři tečky.

x	1	2	3	4	5	6	7	…
y	1	3	1	3	1	3	1	…

Pouze: 1; 3; 1; 3; 1; …

Pedagogická poznámka: U posloupnosti se objevují dva zásadní (poměrně jednoduché) problémy – celková orientace a rozlišování indexu s hodnotou (zápis $g_3 = 5$ znamená, že třetí člen posloupnosti má hodnotu 5) a vyjadřování hodnot posloupnosti pomocí neznámé. Oba problémy se začínají řešit v následujícím příkladu a pokračuje to přes příští hodinu do několika dalších.

Př. 7: Je dána posloupnost $2;\sqrt{3};-7;\frac{2}{3};\pi^2;123;4;1966;-81$. Urči:

a) $a_1;a_4;a_5;a_8$; b) hodnoty posloupnosti pro $n = 2;4;7$;

c) hodnoty *n*, pro které se hodnoty posloupnosti a_n rovnají $2;-7;4;8$.

Pro zadanou posloupnost můžeme psát.

a) $a_1 = 2$; $a_4 = \frac{2}{3}$; $a_5 = \pi^2$; $a_8 = 1966$

b) $n = 2$: $a_2 = \sqrt{3}$, $n = 4$: $a_4 = \frac{2}{3}$, $n = 7$: $a_7 = 4$

c) $a_n = 2$ pro $n = 1$, $a_n = -7$ pro $n = 3$, $a_n = 4$: pro $n = 7$, v posloupnosti neexistuje *n* takové, aby platilo $a_n = 8$.

Pedagogická poznámka: Někteří žáci se diví, jak je možné, že členem posloupnosti je číslo π^2, které není přirozené. Je třeba jim připomenout, že přirozená musí být pouze čísla z definičního oboru (která v použitém zápisu neuvádíme), hodnoty pak mohou být cokoliv z množiny reálných čísel. Je zajímavé, že u $a_4 = \frac{2}{3}$ si nikdo neztěžuje, i když o zcela stejný příklad. Na žáky, kteří si v předchozím příkladu nejsou jistí, je nutné dát pozor, většinou nerozlišují mezi hodnotami *n* a hodnotami posloupnosti, což se při zavedení rekurentního vyjádření ukáže jako nepřekonatelný problém.

Př. 8: Najdi v konečné posloupnosti $2;1;0;2;0;-1;2;-1;-3;2;-2;-5$ všechny členy, pro které platí: a) $a_n = 0$; b) $a_n > 0$; c) $n < 4$; d) $a_n \leq -2$.

a) $a_n = 0$ $a_3; a_5$

b) $a_n > 0$ $a_1; a_2; a_4; a_7; a_{10}$

c) $n < 4$ $a_1; a_2; a_3$ (ptáme se na indexy, na hodnoty z definičního oboru)

d) $a_n \leq -2$ $a_9; a_{11}; a_{12}$

Př. 9: Pomocí zápisu pro posloupnosti zapiš posloupnost $2;4;6;8;10;...$.

Platí: $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$, $a_5 = 10$ ... $\Rightarrow$ hodnota je vždy dvojnásobek dosazovaného čísla n $\Rightarrow$ $(2n)_{n=1}^{\infty}$.

Shrnutí: Definičním oborem posloupností jsou speciální podmnožiny přirozených čísel, které nám umožňují indexovat jejich hodnoty.