8.1.2 Vzorec pro *n*-tý člen I

Předpoklady: 080101

Př. 1: Je dána posloupnost $-5;0;-6;\sqrt{3};-1;0;11;297;-0,03$. Urči:
a) $a_2;a_5;a_8;a_{10}$, b) hodnoty posloupnosti pro $n=2;4;7;11$,
c) hodnoty *n*, pro které se hodnoty posloupnosti rovnají $-1;0;0,03;\sqrt{5}$,
d) všechna a_n, pro která $a_n>4$, e) všechna a_n, pro která $n>4$.

Pro zadanou posloupnost platí:
a) $a_2=0$; $a_5=-1$; $a_8=297$; a_{10} neexistuje.

b) hodnoty posloupnosti pro:
- $n=2$: $a_2=0$,
- $n=4$: $a_4=\sqrt{3}$,
- $n=7$: $a_7=11$,
- $n=11$: a_{11} neexistuje, hodnotu nejde nalézt.

c) hodnoty *n*, pro které se hodnoty posloupnosti rovnají $-1;0;0,03;\sqrt{5}$
- $a_n=-1$ pro $n=5$,
- $a_n=0$ pro $n=2;6$,
- $a_n=0,03$ neexistuje,
- $a_n=\sqrt{5}$ neexistuje.

d) všechna a_n, pro která $a_n>4$: a_7 ($a_7=11$) a a_8 ($a_8=297$).

e) všechna a_n, pro která $n>4$
$a_5=-1$; $a_6=0$; $a_7=11$, $a_8=297$, $a_9=-0,03$

Pokud je posloupnost zadána například takto: $\left(1+2^n\right)_{n=1}^{\infty}$, říkáme, že je **určena vzorcem pro *n*-tý člen** (známe vzorec, který umožňuje ihned určit hodnotu libovolného členu posloupnosti).

Př. 2: Rozhodni, zda výpis i vzorec pro *n*-tý člen udávají stejnou posloupnost.
a) $1;2;4;8;16;32$ $\left(2^n\right)_{n=1}^{5}$ b) $3;6;9;12;15$ $\left(3n\right)_{n=1}^{5}$
c) $\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2}$ $\left(\sqrt{2}\right)_{n=1}^{5}$

Vypíšeme si každou posloupnost ještě jednou pomocí vzorce pro *n*-tý člen a porovnáme s výpisem v zadání.

a) $1;2;4;8;16;32$ $\qquad$ $\left(2^n\right)_{n=1}^{5}=2;4;8;16;32$

Výpis a vzorec udávají různé posloupnosti.

b) $3;6;9;12;15$ $\qquad$ $(3n)_{n=1}^{5}=3;6;9;12;15$

Výpis i vzorec udávají stejnou posloupnost.

c) $\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2}$ $\qquad$ $\left(\sqrt{2}\right)_{n=1}^{5}=\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2}$

Výpis i vzorec udávají stejnou posloupnost.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad není zbytečný. S téměř stoprocentní jistotou je možné očekávat, že se najde několik takových, kteří nebudou schopni příklad vyřešit, protože od minulé hodiny vůbec neví, co zápisy typu $(3n)_{n=1}^{5}$ vlastně znamenají. Všechny podobné nejasnosti je nutné ihned řešit kvůli následující hodině.

Největší problémy jsou samozřejmě s posledním příkladem, žákům v předpisu chybí *n*.

Př. 3: Napiš prvních pět členů následujících posloupností.

a) $(2n+1)_{n=1}^{8}$ $\qquad$ b) $\left(3^{n-3}\right)_{n=1}^{\infty}$ $\qquad$ c) $\left(n^2-2n-3\right)_{n=1}^{4}$ $\qquad$ d) $\left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$

a) $(2n+1)_{n=1}^{8}=3;5;7;9;11;\ldots$

b) $\left(3^{n-3}\right)_{n=1}^{\infty}=\frac{1}{9};\frac{1}{3};1;3;9;\ldots$

c) $\left(n^2-2n-3\right)_{n=1}^{4}=-4;-3;0;5$ (více členů posloupnost nemá)

d) $\left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n=1}^{\infty}=1;0;-1;0;1;\ldots$

Př. 4: Je dána posloupnost $2;\sqrt{3};-7;\frac{2}{3};\pi^2;123;-3;1966;-81$. Urči čísla: a_{n+1}; n; a_{n-1}; a_{n+2}; $n-3$, pokud platí: $a_n=-3$.

Napíšeme si posloupnost, nad každým členem posloupnosti je zapsáno jeho pořadí v řadě:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ 2; & \sqrt{3}; & -7; & \frac{2}{3}; & \pi^2; & 123; & \color{red}{-3}; & 1966; & -81 \end{array}.$$

Člen $a_n=-3$ je vyznačen červeně. Z obrázku je vidět:

- $a_{n+1}=1966$ (člen následující za členem $a_n=-3$),
- $n=7$ (červený člen je sedmý v řadě),
- $a_{n-1}=123$ (člen předcházející členu $a_n=-3$),
- $a_{n+2}=-81$ (člen následující za členem $a_{n+1}=1966$),

- $n-3=4$ (červený člen je sedmý v řadě, člen který ho o tři předchází je čtvrtý).

Př. 5: Je dána posloupnost $2;\sqrt{3};-7;\frac{2}{3};\pi^2;123;-3;1966;-81$. Urči čísla: a_{n+1}; n; a_{n-2}; a_{n+2}; $n-3$, pokud platí: $a_{n-1}=-7$.

Napíšeme si posloupnost, nad každým členem posloupnosti je zapsáno jeho pořadí v řadě:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
2;	$\sqrt{3}$;	-7;	$\frac{2}{3}$;	π^2;	123;	-3;	1966;	-81.

Člen $a_{n-1}=-7$ je vyznačen červeně. Člen $a_n=\frac{2}{3}$ následuje po členu a_{n-1}, označíme si ho modře. Z obrázku je vidět:

- $a_{n+1}=\pi^2$ (člen následující za členem $a_n=\frac{2}{3}$),
- $n=4$ (modrý člen je čtvrtý v řadě),
- $a_{n-2}=\sqrt{3}$ (člen předcházející členu $a_{n-1}=-7$),
- $a_{n+2}=123$ (člen následující za členem $a_{n+1}=\pi^2$),
- $n-3=1$ (modrý člen je čtvrtý v řadě, člen, který ho o tři předchází, je první).

Pedagogická poznámka: Následující příklad je potřeba v dalších hodinách, kdy je potřeba kromě konkrétních čísel dosazovat do vzorců pro *n*-tý člen i proměnné.

Př. 6: Pro zadané posloupnosti urči členy a_n, a_k, a_{n+1}, a_{n-2}, a_{2n}.

a) $\left(\frac{2n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left([-1]^n\left[n^2+2n\right]\right)_{n=1}^{\infty}$

a) $\left(\frac{2n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

$a_n=\frac{2n}{n+1}$, $a_k=\frac{2k}{k+1}$,

$a_{n+1}=\frac{2(n+1)}{(n+1)+1}=\frac{2n+2}{n+2}$,

$a_{n-2}=\frac{2(n-2)}{(n-2)+1}=\frac{2n-4}{n-1}$,

$a_{2n}=\frac{2(2n)}{2n+1}=\frac{4n}{2n+1}$

b) $\left([-1]^n\left[n^2+2n\right]\right)_{n=1}^{\infty}$

$a_n = (-1)^n (n^2 + 2n)$, $\qquad a_k = (-1)^k (k^2 + 2k)$,

$a_{n+1} = (-1)^{n+1} \left[(n+1)^2 + 2(n+1) \right] = (-1)^{n+1} \left[n^2 + 2n + 1 + 2n + 2 \right] = (-1)^{n+1} (n^2 + 4n + 3)$

$a_{n-2} = (-1)^{n-2} \left[(n-2)^2 + 2(n-2) \right] = (-1)^{n-2} \left[n^2 - 4n + 4 + 2n - 4 \right] = (-1)^{n-2} (n^2 - 2n)$

$a_{2n} = (-1)^{2n} \left[(2n)^2 + 2(2n) \right] = (-1)^{2n} (4n^2 + 4n)$

Př. 7: Petáková:
strana 66/cvičení 3 b) c) f)

Shrnutí: Vzorec pro *n*-tý člen posloupnosti nám umožňuje přímo určit její libovolný člen.