8.1.2 Vzorec pro *n*-tý člen

Předpoklady: 8101

Pedagogická poznámka: Příklady na hledání dalších členů posloupností a na objevování vzorců pro *n*-tý člen do značné míry odpovídají typickým příkladům z IQ testů, které studenti znají, a proto je to docela baví. Při řešení příkladů dojde k velkému rozptylu v postupu, zatímco s nejpomalejší částí třídy jsme zvládli pouze první čtyři příklady, pravidelný účastník matematické olympiády měl všechno hotové a zbylo mu deset minut volna.

Pokud je posloupnost zadána například takto: $\left(1+2^n\right)_{n=1}^{\infty}$ říkáme, že je **určena vzorcem pro *n*-tý člen**.

Př. 1: Rozhodni, zda výpis i vzorec pro *n*-tý člen udávají stejnou posloupnost.

a) $1;2;4;8;16;32$ $\quad\left(2^n\right)_{n=1}^{5}$ $\qquad$ b) $3;6;9;12;15$ $\quad\left(3n\right)_{n=1}^{5}$

c) $\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2}$ $\quad\left(\sqrt{2}\right)_{n=1}^{5}$

Vypíšeme si každou posloupnost ještě jednou pomocí vzorce pro *n*-tý člen a porovnáme s výpisem v zadání.

a) $1;2;4;8;16;32$ $\qquad\left(2^n\right)_{n=1}^{5}=2;4;8;16;32$

Výpis a vzorec udávají různé posloupnosti.

b) $3;6;9;12;15$ $\qquad\left(3n\right)_{n=1}^{5}=3;6;9;12;15$

Výpis i vzorec udávají stejnou posloupnost.

c) $\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2}$ $\qquad\left(\sqrt{2}\right)_{n=1}^{5}=\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2}$

Výpis i vzorec udávají stejnou posloupnost.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad není zbytečný. S téměř stoprocentní jistotou je možné očekávat, že se najde několik takových, kteří nebudou schopni příklad vyřešit, protože od minulé hodiny vůbec neví, co zápisy typu $\left(3n\right)_{n=1}^{5}$ vlastně znamenají. Všechny podobně nejasnosti je nutné ihned řešit kvůli následující hodině.
Největší problémy jsou samozřejmě s posledním příkladem, žákům v předpisu chybí *n*.

Př. 2: Napiš prvních pět členů následujících posloupností.

a) $\left(2n+1\right)_{n=1}^{8}$ $\quad$ b) $\left(3^{n-3}\right)_{n=1}^{\infty}$ $\quad$ c) $\left(n^2-2n-3\right)_{n=1}^{4}$ $\quad$ d) $\left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$

a) $\left(2n+1\right)_{n=1}^{8}=3;5;7;9;11;...$

b) $\left(3^{n-3}\right)_{n=1}^{\infty}=\frac{1}{9};\frac{1}{3};1;3;9;\dots$

c) $\left(n^2-2n-3\right)_{n=1}^{4}=-4;-3;0;5$ (více členů posloupnost nemá)

d) $\left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n=1}^{\infty}=1;0;-1;0;1;\dots$

Pedagogická poznámka: Následující příklad je potřeba v dalších hodinách, kdy je potřeba kromě konkrétních čísel dosazovat do vzorců pro *n*-tý člen i proměnné.

Př. 3: Pro zadané posloupnosti urči členy a_n, a_k, a_{n+1}, a_{n-2}, a_{2n}.

a) $\left(\frac{2n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left([-1]^n\left[n^2+2n\right]\right)_{n=1}^{\infty}$

a) $\left(\frac{2n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

$a_n=\frac{2n}{n+1}$, $a_k=\frac{2k}{k+1}$, $a_{n+1}=\frac{2(n+1)}{(n+1)+1}=\frac{2n+2}{n+2}$, $a_{n-2}=\frac{2(n-2)}{(n-2)+1}=\frac{2n-4}{n-1}$,

$a_{2n}=\frac{2(2n)}{2n+1}=\frac{4n}{2n+1}$

b)

$a_n=(-1)^n\left(n^2+2n\right)$,

$a_k=(-1)^k\left(k^2+2k\right)$

$a_{n+1}=(-1)^{n+1}\left[(n+1)^2+2(n+1)\right]=(-1)^{n+1}\left[n^2+2n+1+2n+2\right]=(-1)^{n+1}\left(n^2+4n+3\right)$

$a_{n-2}=(-1)^{n-2}\left[(n-2)^2+2(n-2)\right]=(-1)^{n-2}\left[n^2-4n+4+2n-4\right]=(-1)^{n-2}\left(n^2-2n\right)$

$a_{2n}=(-1)^{2n}\left[(2n)^2+2(2n)\right]=(-1)^{2n}\left(4n^2+4n\right)$

Než začneme hledat vzorce pro posloupnosti několik rad, jak postupovat.

- Vyplatí se projít posloupnosti z předchozích příkladů a sledovat, jak souvisí čísla posloupnosti s jejím vzorce (třeba člen $(-1)^n$ způsobuje „přeskakování“ hodnot).
- Není nutné sestavovat vzorec z jedné vody, naopak v obtížnějších případech je lepší zkoumat a popisovat vzorcem postupně jen některé rysy posloupnosti a pak je dávat dohromady.
- Navržený vzorec je dobré vyzkoušet dosazením. Pokud dosazení nevyjde, ale získaná čísla se od zadané posloupnosti liší pouze tím, že některá přebývají nebo chybí, je dobré hledat úpravu vzorce porovnáním prvního členu posloupnosti a prvního členu ze zkoušeného vzorce.
- Vzájemný vztah sousedících členů může pomoci při nalezení vzorce (například fakt, že všechny členy posloupnosti se liší o 3 znamená, že k vyjádření členů bude určitě nutné použít výraz $3n$), přesto může být v některých situacích zavádějící, protože vzorec vyjadřuje závislost členu posloupnosti na jeho pořadí v řadě a ne sousedních

členech. Sledovat tyto závislosti je proto výhodnější. Z téhož důvodu někdy pomáhá snaha vyjádřit všechny členy posloupnosti pomocí prvního členu a čísla *n*.

Př. 4: K výpisům následujících nekonečných posloupností napiš další tři členy a pak je zapiš pomocí vzorce pro *n*-tý člen.

a) $2;4;6;8;10;...$ b) $\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6};\frac{6}{7};...$ c) $25;5;1;\frac{1}{5};\ ...$

d) $1;-1;1;-1;...$

a) $2;4;6;8;10;12;14;16;...$

Posloupnost tvoří sudá čísla, tedy čísla, která jsou napsat jako $2k$ $\Rightarrow$

$2;4;6;8;10;...=\left(2n\right)_{n=1}^{\infty}$.

b) $\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6};\frac{6}{7};\frac{7}{8};\frac{8}{9};\frac{9}{10};...$

Postřeh: Ve jmenovateli je vždy číslo o 1 větší než v čitateli $\Rightarrow$ možnost $\frac{n}{n+1}$, ale tak bychom nezískali hned první člen $\Rightarrow$ pro $n=1$ musí být čitatel i jmenovat o 1 větší $\Rightarrow$

$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$.

c) $25;5;1;\frac{1}{5};\frac{1}{25};\frac{1}{125};\frac{1}{625};\ ...$

Každý další člen posloupnosti je pětkrát menší než předchozí $\Rightarrow$ ve jmenovateli jsou mocniny pěti $\Rightarrow$ pro posloupnost $\frac{1}{5};\frac{1}{25};\frac{1}{125};\frac{1}{625};\ ...$ by platil vzorec $\left(\frac{1}{5^n}\right)_{n=1}^{\infty}$, místo $\frac{1}{5}$ je na začátku posloupnosti číslo $25=\frac{125}{5}$ $\Rightarrow$ vzorec: $\left(\frac{125}{5^n}\right)_{n=1}^{\infty}=\left(5^{3-n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

d) $1;-1;1;-1;1;-1;1;-1;1;...$

V posloupnosti se střídá 1 a –1 $\Rightarrow$ zřejmě jde o mocniny $\left(-1\right)^n$, pro $n=1$ vzorec nevychází, potřebujeme, abychom pro $n=1$ umocňovali $\left(-1\right)$ na sudou mocninu $\Rightarrow$ $\left(\left(-1\right)^{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Pedagogická poznámka: Je samozřejmé možné najít jiné způsoby, jak zdůvodnit odvozené vzorce. Například u druhého příkladu můžeme sledovat pouze čitatele zlomků $\Rightarrow$ $n+1$ a pak jmenovatele $\Rightarrow$ $n+2$ dohromady $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Př. 5: Napiš pomocí vzorce pro n-tý člen:
a) posloupnost všech přirozených násobků pěti;
b) posloupnost všech přirozených lichých čísel;
c) posloupnost všech přirozených čísel, které po dělení čtyřmi dávají zbytek tři.

a) posloupnost všech přirozených násobků pěti
Jde o posloupnost $5;10;15;20;...\Rightarrow$ čísla, která můžeme napsat jako $5k$ $\Rightarrow$ posloupnost $\left(5n\right)_{n=1}^{\infty}$.
b) posloupnost všech přirozených lichých čísel
Jde o posloupnost $1;3;5;7;9;\ ...\Rightarrow$ čísla, která můžeme napsat jako $2k+1$ $\Rightarrow$ mohla by to být posloupnost $\left(2n+1\right)_{n=1}^{\infty}$, ale její první člen je 3 ne 1 $\Rightarrow$ ze vzorce $2n+1$ musíme odečíst 2 $\Rightarrow$ jde o posloupnost $\left(2n-1\right)_{n=1}^{\infty}$.
c) posloupnost všech přirozených čísel, které po dělení čtyřmi dávají zbytek tři
Jde o čísla $3;7;11;15;19;...\Rightarrow$ čísla, která můžeme napsat jako $4k+3$, stejně jako v předchozím případě, ale nejde o posloupnost $\left(4n+3\right)_{n=1}^{\infty}$, protože by začínala číslem 7 $\Rightarrow$ jde o posloupnost $\left(4n-1\right)_{n=1}^{\infty}$.

Př. 6: Vyjádři následující nekonečné posloupnosti pomocí vzorce pro n-tý člen.
a) $1;4;9;16;25;...$
b) $-2;-5;-8;-11;-14;...$
c) $1;-3;9;-27;81;...$
d) $-3;8;-13;18;-23;28;...$
e) $3;6;12;24;48;...$
f) $3;0;5;-2;7;-4;9;-6;11;...$

a) $1;4;9;16;25;...$
Jde o posloupnost druhých mocnin přirozených čísel $\Rightarrow$ $\left(n^2\right)_{n=1}^{\infty}$.
b) $-2;-5;-8;-11;-14;...$
Čísla se liší o tři, vždy jde o číslo o jedna menší než násobek tří $\Rightarrow$ $3n-1$, všechny členy posloupnosti jsou záporné $\Rightarrow$ $\left(-\left[3n-1\right]\right)_{n=1}^{\infty}=\left(1-3n\right)_{n=1}^{\infty}$.
c) $1;-3;9;-27;81;...$
Absolutní hodnota každého členu posloupnosti je třikrát větší než absolutní hodnota jeho předchůdce $\Rightarrow$ jde o mocniny tří $\Rightarrow$ 3^n, tato posloupnost by ale začínala trojkou $\Rightarrow$ 3^{n-1}.
Zohledníme střídání znamének, které způsobuje výraz $\left(-1\right)^n$. Výraz musíme upravit, aby pro $n=1$ vyšlo kladné číslo $\Rightarrow$ $\left(-1\right)^{n+1}=\left(-1\right)^{n-1}$.
Dáme obě části dohromady: $\left(-1\right)^{n-1}\cdot 3^{n-1}=\left(-3\right)^{n-1}$ $\Rightarrow$ $\left(\left[-3\right]^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$.
d) $-3;8;-13;18;-23;28;...$
Zapomeneme na znaménka $\Rightarrow$ čísla se liší o 5, vždy jsou o 2 menší než násobek pěti $\Rightarrow$ $5n-2$, střídání znamének zajistí člen $\left(-1\right)^n$ $\Rightarrow$ $\left(\left[-1\right]^n\left[5n-2\right]\right)_{n=1}^{\infty}$.
e) $3;6;12;24;48;...$
Každý člen je dvakrát větší než jeho předchůdce $\Rightarrow$ zkusíme členy napsat pomocí mocnin dvou: $3\cdot 1;3\cdot 2^1;3\cdot 2^2;3\cdot 2^3;...$ $\Rightarrow$ $\left(3\cdot 2^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$.

f) $3;0;5;-2;7;-4;9;-6;11;...$

Posloupnost je „složena“ ze dvou částí

- jedna část je rostoucí, každé číslo je o dva větší než předchozí $\Rightarrow$ jako bych přičítal $1;3;5;...$,
- druhá část je klesající, každé číslo je o dva menší než předchozí $\Rightarrow$ jako bychom odečítali $-2;-4;-6;...$.

Zkusíme rozepsat čísla v posloupnosti: $3=2+1;0=2-2;5=2+3;-2=2-4;...$

$\Rightarrow \left(2+[-1]^{n-1}n\right)_{n=1}^{\infty}$.

Př. 7: Petáková:

strana 66/cvičení 1 b) d)

strana 66/cvičení 2 b) c) d)

strana 66/cvičení 3 b) c) f)

Shrnutí: Vzorec pro *n*-tý člen posloupnosti nám umožňuje přímo určit její libovolný člen.