8.1.4 Rekurentní zadání posloupnosti I

Předpoklady: 080103

Př. 1: Je dána posloupnost $7;-\pi;7;\frac{1}{6};2;100;-0,02;13;13$. Urči čísla: a_n; n; a_{n-1}; a_{n+2}; $n-2$, pokud platí: $a_{n+1}=2$. Jakou hodnotu by musel mít člen a_{n+1}, aby příklad nebyl zadán jednoznačně?

Napíšeme si posloupnost, nad každým členem posloupnosti je zapsáno jeho pořadí v řadě:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ 7; & -\pi; & 7; & \frac{1}{6}; & 2; & 100; & -0,02; & 13; & 13 \end{array}.$$

Člen $a_{n+1}=2$ je vyznačen modře. Z obrázku je vidět:

- $a_n=\frac{1}{6}$ (člen předcházející členu $a_{n+1}=2$ - je vyznačen červeně),
- $n=4$ (červený člen je čtvrtý),
- $a_{n-1}=7$ (člen předcházející členu a_n),
- $a_{n+2}=100$ (člen následující za členem $a_{n+1}=2$),
- $n-2=2$ (červený člen a_n je čtvrtý v řadě, člen který ho o dva předchází je druhý).

Pedagogická poznámka: Podle mých zkušeností je pro studenty pochopitelnější zavádět rekurentní posloupnost takto (snadno kontrolovatelnou ukázkou), než dosazováním do rekurentního vzorce, jak je to uděláno v učebnici ($a_{n+1}=2a_n \Rightarrow n=2: a_{2+1}=2a_2$).

Př. 2: Napiš prvních pět členů posloupnosti $(6-2n)_{n=1}^{\infty}$. Zkus najít jiné vyjádření posloupnosti než pomocí vzorce pro *n*-tý člen.

Prvních pět členů (dosazujeme do vzorce za *n*) $\Rightarrow$ $4;2;0;-2;-4;\ldots$.
Jiné vyjádření: Využijeme fakt, že každý člen posloupnosti je o dva menší než člen předchozí $\Rightarrow$ první člen posloupnosti je 4 a každý další člen je o dva menší než člen před ním. Posloupnost je nekonečná.

Pedagogická poznámka: Když příklad kontrolujeme, část žáků diktuje pouze vztah mezi členy a zapomíná na hodnotu prvního. Stačí se zeptat zda vztah mezi členy určuje posloupnost jednoznačně a je jasno. Na tabuli napíšeme zadání tak, jak je studenti diktují (tedy slovně) a pak se bavíme, jak by údaje asi zapsali matematici.

Jak zapsat podmínky matematicky?

- první člen je 4: $a_1=4$,
- každý další člen je o dva menší než člen před ním: $a_{n+1}=a_n-2$ (abychom nemuseli psát nekonečně mnoho zápisů typu $a_2=a_1-2$, $a_3=a_2-2$, …),
- jde o nekonečnou posloupnost, za *n* dosazujeme všechna přirozená čísla: $n\in N$.

Zkráceně píšeme: $a_1 = 4; a_{n+1} = a_n - 2; n \in N$.
Tento způsob zadání posloupnosti pomocí předchozího členu se nazývá **rekurentní zadání posloupnosti** (od latinského recurrere = vrátit se, jít zpět).

Dodatek: Funkce rekurentně zadávat nemůžeme, protože u nich neexistuje předchozí člen.

Pedagogická poznámka: U některých studentů se objevují velké potíže s pochopením principu rekurentního zadání. Vycházejí ze dvou zdrojů: studenti nerozlišují hodnoty posloupnosti a_n a hodnoty indexu *n*, nebo si nedokáží představit, jak za *n* dosazujeme pro každý člen různé konkrétní hodnoty. Zřejmě mají špatnou už základní představu o proměnné, protože se stále snaží představovat si pod *n* jednu konkrétní hodnotu a nevidí, že vzorec $a_{n+1} = a_n - 2; n \in N$:
nám umožňuje „postavit se“ na libovolné místo v posloupnosti,
neobsahuje informaci o konkrétních hodnotách, ale o tom, jak spolu sousední hodnoty souvisí.

Př. 3: Napiš prvních sedm členů rekurentně zadaných posloupností:

a) $a_1 = 3; a_{n+1} = a_n + 2; n \in N$

b) $a_1 = -\frac{1}{4}; a_{n+1} = (-2)a_n; n \in N$

c) $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n; n \in N$

d) $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n + n; n \in N$

e) $a_1 = 2; a_{n+1} = 3|a_n| - (n+1)^2; n \in N$

a) $a_1 = 3; a_{n+1} = a_n + 2; n \in N$
První člen je 3 a každý člen je o dva větší než člen předchozí:
$3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; ...$

b) $a_1 = -\frac{1}{4}; a_{n+1} = (-2)a_n; n \in N$
První člen je $-\frac{1}{4}$ a každý člen je (-2) násobek předchozího členu:
$a_2 = (-2)a_1 = (-2)\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $a_3 = (-2)a_2 = (-2)\frac{1}{2} = -1$ $\ldots$
$-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; -1; 2; -4; 8; -16; \ldots$.

c) $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n; n \in N$
První člen je 1 a každý další člen spočítáme tak, že od druhé mocniny předchozí hodnoty odečteme dvojnásobek předchozí hodnoty:
$a_2 = a_1^2 - 2a_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$, $a_3 = a_2^2 - 2a_2 = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 3$ $\ldots$
$1; -1; 3; 3; 3; 3; 3; \ldots$.

d) $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n + n; n \in N$
První člen je 1 a každý další člen spočítáme tak, že k předchozí hodnotě přičteme pořadí předchozí hodnoty v řadě:

$a_2 = a_1 + 1 = 1+1 = 2$, $a_3 = a_2 + 2 = 2+2 = 4$ …
$1;2;4;7;11;16;22;...$

e) $a_1 = 2; a_{n+1} = 3|a_n| - (n+1)^2; n \in N$
První člen je 2 a každý další člen spočítáme tak, že od trojnásobku absolutní hodnoty předchozího členu odečteme druhou mocninu pořadí počítané hodnoty:
$a_2 = 3|a_1| - (1+1)^2 = 3|2| - (1+1)^2 = 2$, $a_3 = 3|a_2| - (2+1)^2 = 3|2| - (2+1)^2 = -3$ …
$2;2;-3;-7;-4;-24;23;....$

Pedagogická poznámka: Problémy nastávají v bodech a) a d). U prvního bodu chci po žácích, aby si prostudovali rekurentní zápis posloupnosti z příkladu 3. Trván na tom, aby žáci napsali, jaké hodnoty do posloupnosti spočítají oni, a pak se bavíme o tom, co je na jejich představě špatně.
Je potřeba, aby všichni spočítali bod d). Jde zejména o pečlivé rozepsání $a_2 = a_1 + 1 = 1+1 = 2$, hodně žáků má tendenci při výpočtu druhé členu dosazovat $n = 2$ a počítat: $a_2 = a_1 + 2 = 1+2 = 3$.

Př. 4: Napiš prvních sedm členů rekurentně zadané posloupnosti $a_1 = 2; a_2 = 1; a_{n+2} = a_{n+1} - a_n; n \in N$.

$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \Rightarrow$ další hodnotu počítáme z předchozí hodnoty a hodnoty, která předchází předchozí hodnotu.
$2;1;$
$a_3 = a_2 - a_1 = 1 - 2 = -1 \quad \Rightarrow \quad 2;1;-1$
$a_4 = a_3 - a_2 = -1 - 1 = -2 \quad \Rightarrow \quad 2;1;-1;-2$
$2;1;-1;-2;-1;1;2;...$

Pedagogická poznámka: Většina žáků dokáže předchozí příklad vyřešit sama. Těm, kteří mají problémy, pomáhá, když si najdou rozdíly s předchozími příklady.

Př. 5: Napiš prvních sedm členů rekurentně zadaných posloupností.
a) $a_1 = 1; a_2 = 3; a_{n+2} = a_{n+1} + a_n; n \in N$
b) $a_1 = 2; a_2 = -1; a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n; n \in N$
c) $a_1 = 3; a_2 = -1; a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n; n \in N$
d) $a_1 = 1; a_2 = -1; a_{n+2} = a_{n+1} + a_{n+1} \cdot a_n; n \in N$
e) $a_1 = 1; a_{n+2} = (a_{n+1})^2 + 2a_n; n \in N$

a) $a_1 = 1; a_2 = 3; a_{n+2} = a_{n+1} + a_n; n \in N$
$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 3 = 4$
$a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 4 = 7$
$1;3;4;7;11;18;29;...$

b) $a_1 = 2; a_2 = -1; a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n; n \in N$

$a_3 = a_2 - 2a_1 = (-1) - 2 \cdot 2 = -5$
$a_4 = a_3 - 2a_2 = (-5) - 2(-1) = -3$
$2; -1; -5; -3; 7; 13; -1; \ldots$

c) $a_1 = 3; a_2 = -1; a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n; n \in N$
$a_3 = a_2 - 2a_1 = (-1) - 2 \cdot 3 = -7$
$a_4 = a_3 - 2a_2 = -7 - 2 \cdot (-1) = -5$
$3; -1; -7; -5; 9; 19; 1; \ldots$

d) $a_1 = 1; a_2 = -1; a_{n+2} = a_{n+1} + a_{n+1} \cdot a_n; n \in N$
$a_3 = a_2 + a_2 \cdot a_1 = -1 + (-1) \cdot 1 = -2$
$a_4 = a_3 + a_3 \cdot a_2 = -2 + (-2) \cdot (-1) = 0$
$1; -1; -2; 0; 0; 0; 0; \ldots$

e) $a_1 = 1; a_{n+2} = (a_{n+1})^2 + 2a_n; n \in N$
Nejde určit, chybí druhé počáteční číslo.

Př. 6: Urči desátý člen rekurentně zadané posloupnosti: $a_1 = 1; a_2 = 2; a_{n+2} = a_{n+1} - a_n; n \in N$.

Bohužel musíme spočítat všechny členy před desátým:
$1; 2; 1; -1; -2; -1; 1; 2; 1; -1$
Desátým členem posloupnosti je číslo –1.

Předchozí příklad ukazuje asi největší nevýhodu rekurentně zadaných posloupností – i když nás zajímá konkrétní člen a ne členy před ním, stejně je musíme určit, abychom zjistili hodnotu hledaného členu.
Některé posloupnosti jinak než rekurentně zadat nejde (a rekurentní zadání je možné jen u posloupností).

Shrnutí: Posloupnost je možné zadat i pomocí odkazu na předcházející členy – rekurentně.