

## 8.1.4 Rekurentní zadání posloupnosti I

**Předpoklady:** 080103

**Př. 1:** Je dána posloupnost  $7; -\pi; 7; \frac{1}{6}; 2; 100; -0,02; 13; 13$ . Urči čísla:  $a_n$ ;  $n$ ;  $a_{n-1}$ ;  $a_{n+2}$ ;  $n-2$ , pokud platí:  $a_{n+1} = 2$ . Jakou hodnotu by musel mít člen  $a_{n+1}$ , aby příklad nebyl zadán jednoznačně?

Napíšeme si posloupnost, nad každým členem posloupnosti je zapsáno jeho pořadí v řadě:

$a_1$   $a_2$   $a_3$   $a_4$   $a_5$   $a_6$   $a_7$   $a_8$   $a_9$   
 $7; -\pi; 7; \frac{1}{6}; 2; 100; -0,02; 13; 13$

Člen  $a_{n+1} = 2$  je vyznačen modře. Z obrázku je vidět:

- $a_n = \frac{1}{6}$  (člen předcházející členu  $a_{n+1} = 2$  - je vyznačen červeně),
- $n = 4$  (červený člen je čtvrtý),
- $a_{n-1} = 7$  (člen předcházející členu  $a_n$ ),
- $a_{n+2} = 100$  (člen následující za členem  $a_{n+1} = 2$ ),
- $n-2 = 2$  (červený člen  $a_n$  je čtvrtý v řadě, člen, který ho o dva předchází, je druhý).

**Pedagogická poznámka:** Podle mých zkušeností je pro studenty pochopitelnější zavádět rekurentní posloupnost takto (snadno kontrolovatelnou ukázkou), než dosazováním do rekurentního vzorce, jak je to uděláno v učebnici ( $a_{n+1} = 2a_n \Rightarrow n = 2 : a_{2+1} = 2a_2$ ).

**Př. 2:** Napiš prvních pět členů posloupnosti  $(6-2n)_{n=1}^{\infty}$ . Zkus najít jiné vyjádření posloupnosti než pomocí vzorce pro  $n$ -tý člen.

Prvních pět členů (dosazujeme do vzorce za  $n$ )  $\Rightarrow 4; 2; 0; -2; -4; \dots$

Jiné vyjádření: Využijeme fakt, že každý člen posloupnosti je o dva menší než člen předchozí  $\Rightarrow$  první člen posloupnosti je 4 a každý další člen je o dva menší než člen před ním.

Posloupnost je nekonečná.

**Pedagogická poznámka:** Když příklad kontrolujeme, část žáků diktuje pouze vztah mezi členy a zapomíná na hodnotu prvního. Stačí se zeptat, zda vztah mezi členy určuje posloupnost jednoznačně, a je jasno. Na tabuli napíšeme zadání tak, jak je studenti diktují (tedy slovně) a pak se bavíme, jak by údaje asi zapsali matematici.

Jak zapsat podmínky matematicky?

- první člen je 4:  $a_1 = 4$ ,
- každý další člen je o dva menší než člen před ním:  $a_{n+1} = a_n - 2$  (abychom nemuseli psát nekonečně mnoho zápisů typu  $a_2 = a_1 - 2$ ,  $a_3 = a_2 - 2$ , ...),
- jde o nekonečnou posloupnost, za  $n$  dosazujeme všechna přirozená čísla:  $n \in \mathbb{N}$ .

Zkráceně píšeme:  $a_1 = 4; a_{n+1} = a_n - 2; n \in N$ .

Tento způsob zadání posloupnosti pomocí předchozího členu se nazývá **rekurentní zadání posloupnosti** (od latinského recurrere = vrátit se, jít zpět).

**Dodatek:** Funkce rekurentně zadávat nemůžeme, protože u nich neexistuje předchozí člen.

**Pedagogická poznámka:** U některých studentů se objevují velké potíže s pochopením principu rekurentního zadání. Vycházejí ze dvou zdrojů: studenti nerozlišují hodnoty posloupnosti  $a_n$  a hodnoty indexu  $n$ , nebo si nedokáží představit, jak za  $n$  dosazujeme pro každý člen různé konkrétní hodnoty. Zřejmě mají špatnou už základní představu o proměnné, protože se stále snaží představit si pod  $n$  jednu konkrétní hodnotu a nevidí, že vzorec  $a_{n+1} = a_n - 2; n \in N$ :

nám umožňuje „postavit se“ na libovolné místo v posloupnosti, neobsahuje informaci o konkrétních hodnotách, ale o tom, jak spolu sousední hodnoty souvisí.

**Př. 3:** Napiš prvních sedm členů rekurentně zadaných posloupností:

a)  $a_1 = 3; a_{n+1} = a_n + 2; n \in N$

b)  $a_1 = -\frac{1}{4}; a_{n+1} = (-2)a_n; n \in N$

c)  $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n; n \in N$

d)  $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n + n; n \in N$

e)  $a_1 = 2; a_{n+1} = 3|a_n| - (n+1)^2; n \in N$

a)  $a_1 = 3; a_{n+1} = a_n + 2; n \in N$

První člen je 3 a každý člen je o dva větší než člen předchozí:  
3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; ...

b)  $a_1 = -\frac{1}{4}; a_{n+1} = (-2)a_n; n \in N$

První člen je  $-\frac{1}{4}$  a každý člen je  $(-2)$  násobek předchozího členu:

$$a_2 = (-2)a_1 = (-2)\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}, \quad a_3 = (-2)a_2 = (-2)\frac{1}{2} = -1 \quad \dots$$

$$-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; -1; 2; -4; 8; -16; \dots$$

c)  $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n; n \in N$

První člen je 1 a každý další člen spočítáme tak, že od druhé mocniny předchozí hodnoty odečteme dvojnásobek předchozí hodnoty:

$$a_2 = a_1^2 - 2a_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1, \quad a_3 = a_2^2 - 2a_2 = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 3 \quad \dots$$

$$1; -1; 3; 3; 3; 3; \dots$$

d)  $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n + n; n \in N$

První člen je 1 a každý další člen spočítáme tak, že k předchozí hodnotě přičteme pořadí předchozí hodnoty v řadě:

$$a_2 = a_1 + 1 = 1 + 1 = 2, \quad a_3 = a_2 + 2 = 2 + 2 = 4 \quad \dots$$

1; 2; 4; 7; 11; 16; 22; ...

e)  $a_1 = 2; a_{n+1} = 3|a_n| - (n+1)^2; n \in N$

První člen je 2 a každý další člen spočítáme tak, že od trojnásobku absolutní hodnoty předchozího členu odečteme druhou mocninu pořadí počítané hodnoty:

$$a_2 = 3|a_1| - (1+1)^2 = 3|2| - (1+1)^2 = 2, \quad a_3 = 3|a_2| - (2+1)^2 = 3|2| - (2+1)^2 = -3 \quad \dots$$

2; 2; -3; -7; -4; -24; 23; ...

**Pedagogická poznámka:** Problémy nastávají v bodech a) a d). U prvního bodu chci po žácích, aby si prostudovali rekurentní zápis posloupnosti z příkladu 3. Trvám na tom, aby žáci napsali, jaké hodnoty do posloupnosti spočítají oni, a pak se bavíme o tom, co je na jejich představě špatně. Je potřeba, aby všichni spočítali bod d). Jde zejména o pečlivé rozepsání  $a_2 = a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$ , hodně žáků má tendenci při výpočtu druhého členu dosazovat  $n = 2$  a počítat:  $a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$ .

**Př. 4:** Napiš prvních sedm členů rekurentně zadané posloupnosti

$$a_1 = 2; a_2 = 1; a_{n+2} = a_{n+1} - a_n; n \in N.$$

$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \Rightarrow$  další hodnotu počítáme z předchozí hodnoty a hodnoty, která předchází předchozí hodnotu.

2; 1;

$$a_3 = a_2 - a_1 = 1 - 2 = -1 \quad \Rightarrow \quad 2; 1; -1$$

$$a_4 = a_3 - a_2 = -1 - 1 = -2 \quad \Rightarrow \quad 2; 1; -1; -2$$

2; 1; -1; -2; -1; 2; ...

**Pedagogická poznámka:** Většina žáků dokáže předchozí příklad vyřešit sama. Těm, kteří mají problémy, pomáhá, když si najdou rozdíly s předchozími příklady.

**Př. 5:** Napiš prvních sedm členů rekurentně zadaných posloupností.

a)  $a_1 = 1; a_2 = 3; a_{n+2} = a_{n+1} + a_n; n \in N$

b)  $a_1 = 2; a_2 = -1; a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n; n \in N$

c)  $a_1 = 3; a_2 = -1; a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n; n \in N$

d)  $a_1 = 1; a_2 = -1; a_{n+2} = a_{n+1} + a_{n+1} \cdot a_n; n \in N$

e)  $a_1 = 1; a_{n+2} = (a_{n+1})^2 + 2a_n; n \in N$

a)  $a_1 = 1; a_2 = 3; a_{n+2} = a_{n+1} + a_n; n \in N$

$$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 3 = 4$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 4 = 7$$

1; 3; 4; 7; 11; 18; 29; ...

b)  $a_1 = 2; a_2 = -1; a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n; n \in N$

$$a_3 = a_2 - 2a_1 = (-1) - 2 \cdot 2 = -5$$

$$a_4 = a_3 - 2a_2 = (-5) - 2(-1) = -3$$

2; -1; -5; -3; 7; 13; -1; ...

c)  $a_1 = 3; a_2 = -1; a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n; n \in N$

$$a_3 = a_2 - 2a_1 = (-1) - 2 \cdot 3 = -7$$

$$a_4 = a_3 - 2a_2 = -7 - 2 \cdot (-1) = -5$$

3; -1; -7; -5; 9; 19; 1; ...

d)  $a_1 = 1; a_2 = -1; a_{n+2} = a_{n+1} + a_{n+1} \cdot a_n; n \in N$

$$a_3 = a_2 + a_2 \cdot a_1 = -1 + (-1) \cdot 1 = -2$$

$$a_4 = a_3 + a_3 \cdot a_2 = -2 + (-2) \cdot (-1) = 0$$

1; -1; -2; 0; 0; 0; 0; ...

e)  $a_1 = 1; a_{n+2} = (a_{n+1})^2 + 2a_n; n \in N$

Nejde určit, chybí druhé počáteční číslo.

**Př. 6:** Urči desátý člen rekurentně zadané posloupnosti:  $a_1 = 1; a_2 = 2; a_{n+2} = a_{n+1} - a_n; n \in N$ .

Bohužel musíme spočítat všechny členy před desátým:

1; 2; 1; -1; -2; -1; 1; 2; 1; -1

Desátým členem posloupnosti je číslo -1.

Předchozí příklad ukazuje asi největší nevýhodu rekurentně zadaných posloupností – i když nás zajímá konkrétní člen a ne členy před ním, stejně je musíme určit, abychom zjistili hodnotu hledaného členu.

Některé posloupnosti jinak než rekurentně zadat nejde (a rekurentní zadání je možné jen u posloupností).

**Shrnutí:** Posloupnost je možné zadat i pomocí odkazu na předcházející členy – rekurentně.