8.1.5 Rekurentní zadání posloupnosti II

Předpoklady: 080104

Pedagogická poznámka: Tato hodina rozhodně není zásadní z pohledu další látky a je možné ji vynechat. V příkladu 4 je malá pravděpodobnost, že by někdo z žáků příklad vyřešil naznačeným postupem. Spíše je zajímavé, kolik z nich pochopí předvedené postupy dostatečně na to, aby v příkladu 5 použili správný trik a nalezli řešení.

Př. 1: Vypočti a_{n+1} a a_n+1 pro následující posloupnosti.

a) $(2n+1)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left(\frac{2n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ c) $(n^2-3)_{n=1}^{\infty}$

a) $(2n+1)_{n=1}^{\infty}$

$a_{n+1}=2(n+1)+1=2n+2+1=2n+3$

$a_n+1=n+1+1=n+2$

b) $\left(\frac{2n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

$a_{n+1}=\frac{2(n+1)}{(n+1)+1}=\frac{2n+2}{n+2}$

$a_n+1=\frac{2n}{n+1}+1=\frac{2n+n+1}{n+1}=\frac{3n+1}{n+1}$

c) $(n^2-3)_{n=1}^{\infty}$

$a_{n+1}=(n+1)^2-3=n^2+2n+1-3=n^2+2n-2$

$a_n+1=n^2-3+1=n^2-2$

Př. 2: Proč se v každém bodě předchozího příkladu hodnoty a_{n+1} a a_n+1 liší? Existuje posloupnost, pro kterou se obě hodnoty vždy rovnají?

Oba zápisy znamenají něco zcela jiného:

- a_{n+1}: člen posloupnosti, který následuje po členu a_n (hodnota členu a_{n+1} nemusí s hodnotou členu a_n u některých posloupností vůbec souviset),
- a_n+1: hodnota členu a_n zvětšená o 1.

Pro posloupnost, u které se tyto dvě hodnoty rovnají musí platit $a_{n+1}=a_n+1 \Rightarrow$ každý člen posloupnosti je o 1 větší než jeho předchůdce $\Rightarrow$ jde o všechny posloupnosti $(n+a)_{n=1}^{\infty}$, kde a je libovolné reálné číslo.

Př. 3: Je dána posloupnost $(3n-1)_{n=1}^{\infty}$. Vyjádři ji rekurentně.

Dva možné postupy:
Vypsání čísel
Vypíšeme si členy posloupnosti a zkusíme najít rekurentní vztah.
Posloupnost: $2;5;8;11;14;...$
Platí, že každý člen je o tři větší než předchozí $\Rightarrow$ $a_1 = 2; a_{n+1} = a_n + 3; n \in N$.

Úprava vzorce
Vyjádříme si člen a_{n+1} a v získaném výrazu zkusíme vyrobit vzorec pro a_n:
$a_{n+1} = 3(n+1) - 1 = 3n + 3 - 1 = 3n - 1 + 3 = a_n + 3$
$\Rightarrow a_1 = 2; a_{n+1} = a_n + 3; n \in N$

V obou případech musíme vzorec ověřit. Nemůžeme vyzkoušet všechny členy posloupnosti $\Rightarrow$
ověřujeme vzorec pro členy a_n a a_{n+1}: $a_n = 3n-1$, $a_{n+1} = 3(n+1)-1$.
Dosadíme do rekurentního vyjádření: $a_{n+1} = a_n + 3$.
$3(n+1) - 1 = 3n - 1 + 3$
$3n + 3 - 1 = 3n - 1 + 3$ $\Rightarrow$ vzorec platí.

Př. 4: Ověř, že posloupnost $(3n-1)_{n=1}^{\infty}$ je možné zadat rekurentně také takto:
$a_1 = 2; a_2 = 5; a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n; n \in N$.

Dosadíme stejně jako v předchozím případě.
$a_{n+2} = 3(n+2) - 1$, $a_{n+1} = 3(n+1) - 1$, $a_n = 3n - 1$
$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$
$3(n+2) - 1 = 2[3(n+1) - 1] - (3n - 1)$
$3n + 6 - 1 = 2[3n + 3 - 1] - 3n + 1$
$3n + 5 = 2[3n + 2] - 3n + 1$
$3n + 5 = 6n + 4 - 3n + 1$
$3n + 5 = 3n + 5$ $\Rightarrow$ i druhý rekurentní vzorec je správný $\Rightarrow$ posloupnost může mít více rekurentních vyjádření.

Př. 5: Pro posloupnosti zadané vzorcem pro *n*-tý člen najdi rekurentní vyjádření.
a) $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

V obou případech budeme upravovat vzorec pro a_{n+1} tak, abychom ve výrazu získali vzorec pro a_n.

a) $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$

Upravujeme vzorec pro $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{n}{n+2} = a_n \cdot \frac{n}{n+2}$.

Ještě určíme první člen posloupnosti: $a_1 = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$.

Posloupnost $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$ je rekurentně dána takto: $a_1 = \frac{1}{2}; a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n}{n+2}; n \in N$.

b) $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Upravujeme vzorec pro $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n} = \frac{1}{a_n} \cdot \frac{n+2}{n}$.

Ještě určíme první člen posloupnosti: $a_1 = \frac{n+1}{n} = \frac{1+1}{1} = 2$.

Posloupnost $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je rekurentně zadána takto: $a_1 = 2; a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \cdot \frac{n+2}{n}; n \in N$.

Př. 6: Pro následující rekurentně dané posloupnosti najdi vzorec pro *n*-tý člen.
a) $a_1 = 1; a_{n+1} = 2a_n; n \in N$ b) $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n + 2; n \in N$.

V obou případech můžeme obě posloupnosti vypsat a hledat vzorec přímo z řad.
Pro jednodušší rekurentně zadané posloupnosti existuje i manuálnější postup.

a) $a_1 = 1; a_{n+1} = 2a_n; n \in N \Rightarrow$ platí:

$a_2 = 2a_1$

$a_3 = 2a_2$

$a_4 = 2a_3$

...

$a_{n-1} = 2a_{n-2}$

$a_n = 2a_{n-1}$

Předchozí rovnice vynásobíme: $a_2 a_3 a_4 ... a_{n-1} a_n = 2a_1 \cdot 2a_2 \cdot 2a_3 \cdot ... \cdot 2a_{n-2} \cdot 2a_{n-1}$.

V rovnici vykrátíme členy $a_2; a_3; ...; a_{n-1}$ (jsou na obou stranách): $a_n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{(n-1)\text{krát}} \cdot a_1$

$a_n = 2^{n-1} \cdot 1 = 2^{n-1} \Rightarrow$ vyjádření *n*-tým členem $\left(2^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$.

b) $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n + 2; n \in N \Rightarrow$ platí:

$a_2 = a_1 + 2$

$a_3 = a_2 + 2$

$a_4 = a_3 + 2$

...

$a_{n-1} = a_{n-2} + 2$

$a_n = a_{n-1} + 2$

Předchozí rovnice sečteme:

$a_2+a_3+a_4+...+a_{n-1}+a_n=2+a_1+2+a_2+2+a_3\cdot+...+a_{n-2}+2+a_{n-1}+2$.

Od rovnice odečteme členy $a_2;a_3;...;a_{n-1}$ (jsou na obou stranách): $a_n=\underbrace{2+2+\cdot..+2}_{(n-1)\text{krát}}+a_1$

$a_n=2(n-1)+a_1 \Rightarrow$ máme prakticky hotovo, roznásobíme závorku a přičteme a_1:

$a_n=2n-2+1=2n-1$.

Posloupnost je dána vzorcem: $(2n-1)_{n=1}^{\infty}$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad bod a) samozřejmě počítám u tabule, nechávám studenty chvilku přemýšlet nad tím, co uděláme s vypsanými *n* rovnicemi. K bodu b) si říkáme, že je podobný, ale ne úplně stejný a zkouším studenty chvíli nechat, jestli by je nenapadlo členy posloupnosti místo násobení sečíst.
V následujícím příkladu by se měl už každý rozhodnout sám.

Př. 7: Pomocí jednoho z postupů použitých v příkladu 4 najdi vzorec pro *n*-tý člen u posloupnosti, která je rekurentně dána takto: $a_1=15;a_{n+1}=a_n-3;n\in N$.

Podobně jako v předchozích případech vypíšeme členy posloupnosti:

$a_2=a_1-3$

$a_3=a_2-3$

$a_4=a_3-3$

...

$a_{n-1}=a_{n-2}-3$

$a_n=a_{n-1}-3$

Pokud chceme členy $a_2,...,a_{n-1}$ na obou stranách rovnice odstranit, musíme rovnice navzájem sečíst (při vynásobení by se pravá strana neuvěřitelně zkomplikovala).

$a_2+a_3+a_4+...+a_{n-1}+a_n=a_1-3+a_2-3+a_3-3+...+a_{n-2}-3+a_{n-1}-3$.

Členy vyskytující se na obou stranách rovnice odečteme: $a_n=a_1-3(n-1) \Rightarrow$ máme prakticky hotovo, roznásobíme závorku a přičteme a_1: $a_n=15-3n+3=18-3n$.

Posloupnost je dána vzorcem: $(18-3n)_{n=1}^{\infty}$.

Nejznámější rekurentně danou posloupností je asi Fibonacciho posloupnost (její členy pak bývají označovány jako Fibonacciho čísla). Původně byla zadána následovně.

Př. 8: Kdosi umístil pár králíků na určitém místě ze všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se narodí průběhem jednoho roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku. S případy uhynutí se nepočítá.
Urči počet králíků na konci roku.

Zkusíme nejdříve postupovat úvahou:

konec 1. měsíce	2 páry (původní + nově narozený)
konec 2. měsíce	3 páry (původní + narozený v prvním měsíci + narozený v druhém měsíci)
konec 3. měsíce	5 párů (3 páry, které žily na konci předchozího měsíce + 2 páry

	nové, od původního páru a od páru narozeného v prvním měsíci)
konec 4. měsíce	8 párů (5 párů, které žily na konci předchozího měsíce + 3 páry nové, od původního páru a od páru narozeného v prvním měsíci a páru narozeného ve druhém měsíci)
konec 5. měsíce	13 párů (8 párů, které žily na konci předchozího měsíce + 5 páry nové, od původního páru a od páru narozeného v prvním měsíci a páru narozeného ve druhém měsíci a dvou párů narozených ve třetím měsíci)

Začíná se to komplikovat. Podíváme se na dosavadní výsledky a zkusíme najít jednodušší systém pro výpočet:
počet párů na konci měsíce = páry na konci předchozího měsíce (ty neumřou) + páry nově narozené (jejich počet je stejný jako počet párů v předpředchozím měsíci, protože všechny tyto páry jsou dost staré, aby mohly rodit) $\Rightarrow$ platí: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
Příklad můžeme pojmout jako rekurentně zadanou posloupnost:
$a_1 = 1; a_2 = 2; a_{n+2} = a_{n+1} + a_n; n \in N$.
$1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; 377$
Na konci roku bude v ohradě 377 párů králíků.

Př. 9: Petáková:
strana 66/cvičení 4 a) b) c)
strana 66/cvičení 5 a) b) c)

Shrnutí: