

8.1.8 Důkaz matematickou indukcí I

Předpoklady: 080104

Pedagogická poznámka: Rozdělení látky do dvou hodin je nutné brát s rezervou. Při posledním průchodu jsme první hodinou zaplnili skoro dvě vyučovací hodiny a druhá hodina zůstala zájemcům na domácí studium. Pochopení metody není pro studenty jednoduché. Důkaz uvedený v normálním textu vysvětluji dvakrát. Poprvé žáci nepíší, podruhé projdeme poznámky na tabuli a žáci si udělají poznámky. Při dokazování indukčního kroku je třeba studentům neustále zdůrazňovat, co známe a dokazujeme. Tam je největší problém. U procvičovacích příkladů příliš nečekám a počítám i na tabuli, prvním příkladem, který většina třídy spočítá zcela samostatně bývá první příklad v další hodině, kde už na tabuli spíš nepíšu a odchyťávám problémy v sešitech. Příklady na vzorec pro n -tý vzorec a dělitelnost střídám schválně, protože jednak se mění směr pohledu na metodu a jednak to snad trochu brání zmechanizování metody.

Př. 1: Je dána rekurentní posloupnost $a_1 = 3; a_{n+1} = a_n + 2; n \in \mathbb{N}$. Napiš prvních pět členů posloupnosti a odhadni vzorec pro n -tý člen.

Členy posloupnosti: 3;5;7;9;11;...

Jde o lichá čísla, první je 3 \Rightarrow odhad vzorce $(2n+1)_{n=1}^{\infty}$.

Pokud dosadíme za $n \in \{1;2;3;4;5\}$ získáme prvních pět členů posloupnosti výše \Rightarrow vzorec $(2n+1)_{n=1}^{\infty}$ je správný.

Bohužel tak jednoduché to není, nemůžeme s jistotou tvrdit, že vzorec $a_n = 2n+1$ platí pro všechna přirozená čísla n , vždyť jsme ho zkusili pouze na prvních pět čísel (z nekonečna). Zatím jde pouze o hypotézu (podloženou pěti výpočty). Jak dál?

Vyzkoušet všechna přirozená čísla nejde (je jich nekonečně mnoho) \Rightarrow musíme uvažovat jinak.

Náhodně vyzkoušíme, jak vypadá situace pro větší čísla:

Kolik by mělo být a_{100} ? $a_{100} = 2n+1 = 2 \cdot 100+1 = 201$.

Předpokládáme, že a_{100} je správně. Bude vzorec správně také pro a_{101} ?

Když známe a_{100} můžeme to ověřit dosazením do rekurentního vzorce (který je správně určitě):

$$a_n = a_{101} = a_{100} + 2 = 201 + 2 = 203 = 202 + 1 = 2(101) + 1 = 2n + 1.$$

Pokud platí vzorec pro a_{100} , platí vzorec i pro a_{101} .

Nešlo by to obecně pro a_k a a_{k+1} ?

Předpokládáme, že platí: $a_k = 2k+1$, chceme dokázat, že platí: $a_{k+1} = 2(k+1)+1$.

Zkusíme to z rekurentního vztahu:

$$a_{k+1} = a_k + 2 = 2k + 1 + 2 = 2k + 2 + 1 = 2(k + 1) + 1 \Rightarrow \text{přesně vzorec, který jsme chtěli.}$$

Tím jsme dokázali, že vzorec opravdu platí pro všechna přirozená čísla.

Jak to?

Zopakujeme si co víme:

1. Vzorec platí pro $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5$
2. Pokud platí vzorec pro libovolný člen a_k , platí i pro následující člen a_{k+1} .

\Rightarrow

- platí-li vzorec pro a_5 (už víme, že platí z bodu 1), platí i pro a_6 ,
- platí-li vzorec pro a_6 (už víme, z předchozí řádky), platí i pro a_7 ,
- platí-li vzorec pro a_7 (už víme, z předchozí řádky), platí i pro a_8 ,
- a tak by šlo pokračovat pořád dál až do nekonečna.

Můžeme argumentovat i obráceně. Co kdyby vzorec pro nějaké členy neplatil? Vezmeme první takový člen a označíme ho a_{m+1} . Pro předchozí člen a_m , ale vzorec platí (aby a_{m+1} byl prvním členem pro který vzorec neplatí) \Rightarrow podle bodu 2 platí vzorec i pro a_{m+1} (spor s tím, že pro něj neplatí).

Přirovnání: Do třídy přichází nový student a pan ředitel říká, že bude nejmenší ve třídě. Jak to ověřit? Aby se nemusel se všemi přeměřovat, postavíme třídu do řady podle velikosti. Pokud bude kdokoliv v řadě větší než nováček bude větší než nováček i ten, který je napravo (jako větší) od něj (analogie bodu 2). Stačí přeměřit nováčka s prvním studentem v řadě (tím nejmenším), (analogie bodu 1) pokud je tento větší než nováček je nováček opravdu nejmenší.

Právě jsme si ukázali nový typ matematického důkazu, **důkaz matematickou indukcí**. Tímto důkazem se dokazují věty typu: „Pro všechna přirozená čísla platí $V(n)$ “.

Důkaz matematickou indukcí se skládá ze dvou kroků:

1. **Dokážeme, že platí $V(n)$ pro $n = 1$** (ověření vzorce pro a_1).
2. **Pro každé přirozené číslo k dokážeme: Jestliže platí $V(k)$, pak platí i $V(k + 1)$.** (ověření vzorce pro a_{k+1} za předpokladu, že platí pro a_k).

Bod 2 si můžeme představit jako vytvoření řetězu a bod jedna jako přidělení počátku řetězu ke kůlu. Každý článek řetězu je nyní pevně přidělán ke kůlu, protože články drží pohromadě (bod 2) a první je přidělán ke kůlu (bod 1).

Př. 2: Dokaž pomocí matematické indukce, že pro všechny členy posloupnosti

$$a_1 = \frac{1}{2}; a_{n+1} = 2a_n; n \in \mathbb{N} \text{ platí vzorec pro } n\text{-tý člen } \left(2^{n-2}\right)_{n=1}^{\infty}.$$

Postupujeme podle kroků:

1. Ověření pro $n = 1$:

$$a_n = 2^{n-2} \Rightarrow a_1 = 2^{1-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{platí } (a_1 \text{ je } \frac{1}{2}).$$

2. Předpokládáme, že vzorec platí pro k a dokazujeme ho pro $k+1$:

Předpokládáme, že víme: $a_k = 2^{k-2}$.

Zjišťujeme, zda platí: $a_{k+1} = 2^{(k+1)-2} = 2^{k-1} \Rightarrow$ použijeme rekurentní zadání a spočteme

pomocí a_k člen a_{k+1} : $a_{k+1} = 2a_k = 2 \cdot 2^{k-2} = 2^{k-1}$,

člen a_{k+1} pomocí vzorce: $a_{k+1} = 2^{(k+1)-2} = 2^{k-1}$,

\Rightarrow pomocí předpokladu $a_k = 2^{k-2}$ jsme získali vztah pro $a_{k+1} \Rightarrow$ věta platí pro všechna n .

Př. 3: Dokaž pomocí matematické indukce, že pro všechna přirozená čísla platí: $3/n^3 + 2n$ (3 dělí číslo $n^3 + 2n$).

Postupujeme podle kroků:

1. Ověření pro $n=1$:

$n^3 + 2n = 1^3 + 2 \cdot 1 = 3$ je dělitelné 3 \Rightarrow platí

2. Předpokládáme, že věta platí pro k a dokazujeme ji pro $k+1$:

Předpokládáme, že víme: $3/k^3 + 2k$.

Zjišťujeme, zda platí: $3/(k+1)^3 + 2(k+1) \Rightarrow$ upravujeme výraz tak, abychom využili

$3/k^3 + 2k$:

$(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 = k^3 + 2k + 3k^2 + 3k + 3 = k^3 + 2k + 3(k^2 + k + 1)$

červená část výrazu je dělitelná kvůli předpokladu $3/k^3 + 2k \Rightarrow$ věta platí pro všechna n .

Z předchozích dvou příkladů je vidět výhoda důkazu matematickou indukcí: dosazení pro $n=1$ je mechanická záležitost, při dokazování indukčního kroku pak víme, jaký tvar potřebujeme získat.

Př. 4: Dokaž pomocí matematické indukce, že pro všechna přirozená čísla platí:
 $5/2^{4n+3} - 3$. (5 dělí číslo $2^{4n+3} - 3$).

Postupujeme podle kroků:

1. Ověření pro $n=1$:

$2^{4n+3} - 3 = 2^{4 \cdot 1 + 3} - 3 = 2^7 - 3 = 128 - 3 = 125$ je dělitelné 5 \Rightarrow platí.

2. Předpokládáme, že věta platí pro k a dokazujeme ji pro $k+1$:

předpokládáme, že víme: $5/2^{4k+3} - 3$

zjišťujeme zda platí: $5/2^{4(k+1)+3} - 3 \Rightarrow$ upravujeme výraz tak, abychom využili $5/2^{4k+3} - 3$:

$2^{4(k+1)+3} - 3 = 2^{4k+7} \underbrace{-2^{4k+3} + 2^{4k+3}}_0 - 3 = 2^{4k+3} (2^4 - 1) + 2^{4k+3} - 3 = 2^{4k+3} \cdot 15 + 2^{4k+3} - 3$

Červená část výrazu je dělitelná kvůli předpokladu $5/2^{4k+3} - 3 \Rightarrow$ věta platí pro všechna n .

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad studenti sami nevyřeší kvůli použití triku s přičtením nuly. Je třeba, abyste jim pomohli rozlišit, že metodu indukce umí i přes to, že je trik nenapadl.

Př. 5: Petáková:
strana 150/cvičení 101 a)
strana 150/cvičení 102 a)

Shrnutí: Důkaz matematickou indukcí má dva kroky: v prvním kroku zkontrolujeme platnost pro první člen (připevňujeme počátek řetězu), ve druhém z platnosti pro k -tý člen dokážeme platnost pro $k + 1$ člen (jednotlivé články řetězu drží pohromadě).