

8.1.9 Důkaz matematickou indukcí II

Předpoklady: 080108

Př. 1: Dokaž pomocí matematické indukce, že pro všechna členy posloupnosti

$$a_1 = 16; a_{n+1} = a_n - 3; n \in N \text{ platí vzorec pro } n\text{-tý člen } (19 - 3n)_{n=1}^{\infty}.$$

Postupujeme podle kroků:

1. ověření pro $n = 1$

$$a_n = 19 - 3n \Rightarrow a_1 = 19 - 3 \cdot 1 = 16 \Rightarrow \text{platí } (a_1 \text{ je } 16)$$

2. předpokládám, že vzorec platí pro k a dokazuji ho pro $k + 1$

předpokládám, že vím: $a_k = 19 - 3k$

zjišťujeme zda platí: $a_{k+1} = 19 - 3(k+1) = 16 - 3k \Rightarrow$ použiju rekurentní zadání a spočtu

pomocí a_k člen a_{k+1} : $a_{k+1} = a_k - 3 = 19 - 3k - 3 = 16 - 3k$, dosadil jsem vzorec $a_k = 19 - 3k$ a získal jsem vztah pro $a_{k+1} \Rightarrow$ věta platí pro všechna n

Př. 2: Dokaž pomocí matematické indukce, že pro všechny členy posloupnosti

$$a_1 = 0; a_{n+1} = 2 - a_n; n \in N \text{ platí vzorec pro } n\text{-tý člen } (1 + [-1]^n)_{n=1}^{\infty}.$$

Postupujeme podle kroků:

1. Ověření pro $n = 1$:

$$a_n = 1 + [-1]^n \Rightarrow a_1 = 1 + (-1)^1 = 0 \Rightarrow \text{platí } (a_1 \text{ je } 0)$$

2. Předpokládáme, že vzorec platí pro k a dokazujeme ho pro $k + 1$:

Předpokládáme, že víme: $a_k = 1 + (-1)^k$.

Zjišťujeme, zda platí: $a_{k+1} = 1 + (-1)^{k+1} \Rightarrow$ použijeme rekurentní zadání a spočteme pomocí

$$a_k \text{ člen } a_{k+1}: a_{k+1} = 2 - a_k = 2 - (1 + [-1]^k) = 2 - 1 - (-1)^k = 1 + (-1)(-1)^k = 1 + (-1)^{k+1}.$$

Dosadili jsme vzorec $a_k = 1 + (-1)^k$ a získali jsme vztah pro $a_{k+1} \Rightarrow$ věta platí pro všechna n .

Př. 3: Dokaž pomocí matematické indukce, že pro všechna přirozená čísla platí: $2 \mid n^2 + n$ (2 dělí číslo $n^2 + n$).

Postupujeme podle kroků:

1. Ověření pro $n = 1$:

$$n^2 + n = 1^2 + 1 = 2 \text{ je dělitelné } 2 \Rightarrow \text{platí.}$$

2. Předpokládáme, že věta platí pro k a dokazujeme ji pro $k + 1$:

Předpokládáme, že víme: $2 \mid k^2 + k$.

Zjišťujeme, zda platí: $2 \mid (k+1)^2 + (k+1) \Rightarrow$ upravujeme výraz tak, abychom využili

$$2 \mid k^2 + k:$$

$$(k+1)^2 + (k+1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = k^2 + k + 2k + 2 = k^2 + k + 2(k+1).$$

Červená část výrazu je dělitelná kvůli předpokladu $2 \mid k^2 + k \Rightarrow$ věta platí pro všechna n .

Př. 4: Dokaž pomocí matematické indukce, že pro členy rekurentně zadané posloupnosti

$$a_1 = 1; a_{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a_n; n \in N \text{ platí vzorec } a_n = \frac{1}{n^2}.$$

Postupujeme podle kroků:

1. ověření pro $n = 1$

$$a_1 = \frac{1}{1^2} = 1 \quad \text{platí}$$

2. předpokládám, že vzorec platí pro a_k a dokazuji ho pro a_{k+1}

předpokládám, že vím: $a_k = \frac{1}{k^2}$

$$a_{k+1} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 a_k = \frac{k^2}{(k+1)^2} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(k+1)^2} \text{ vzorec pro } a_{k+1} \text{ platí}$$

\Rightarrow vzorec platí pro všechna a_n

Př. 5: Dokaž pomocí matematické indukce, že pro členy rekurentně zadané posloupnosti

$$a_1 = 1; a_{n+1} = \frac{n \cdot a_n + 2}{n+1}; n \in N \text{ platí vzorec } a_n = 2 - \frac{1}{n}.$$

Postupujeme podle kroků:

1. ověření pro $n = 1$

$$a_1 = 2 - \frac{1}{1} = 2 - 1 = 1 \quad \text{platí}$$

2. předpokládám, že vzorec platí pro a_k a dokazuji ho pro a_{k+1}

předpokládám, že vím: $a_k = 2 - \frac{1}{k}$

zjistíme zda platí: $a_{k+1} = 2 - \frac{1}{k+1} \Rightarrow$ použiju rekurentní zadání a spočtu pomocí a_k člen

a_{k+1} :

$$a_{k+1} = \frac{k \cdot a_k + 2}{k+1} = \frac{k \cdot \left(2 - \frac{1}{k}\right) + 2}{k+1} = \frac{k \cdot \left(\frac{2k-1}{k}\right) + 2}{k+1} = \frac{2k-1+2}{k+1} = \frac{2k+2}{k+1} = \frac{2k+2}{k+1} - \frac{1}{k+1} = 2 - \frac{1}{k+1}$$

vzorec pro a_{k+1} platí

\Rightarrow vzorec platí pro všechna a_n

Co znamená zápis $1 + 2 + 3 + \dots + n$?

Zkusíme to nejdřív na příkladech:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 4 = 1 + 2 + 3 + 4$$

Př. 6: Napiš konkrétní součet řady $1+2+3+\dots+n$, pokud platí:

a) $n=10$,

b) $n=3$,

c) $n=1$.

a) $n=10$

$$1+2+3+\dots+n=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

b) $n=3$

$$1+2+3+\dots+n=1+2+3$$

c) $n=1$

$$1+2+3+\dots+n=1$$

Př. 7: Dokaž pomocí matematické indukce, že pro všechna přirozená čísla platí:

$$1+2+\dots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Postupujeme podle kroků:

1. ověření pro $n=1$

součet na levé straně má jediný člen 1

dosazují do vzorce na pravé straně $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1(1+1)}{2}=1$

\Rightarrow pro $n=1$ rovnost platí

2. předpokládám, že rovnost platí pro k a dokazuji ji pro $k+1$

předpokládám, že vím platí pro k : $1+2+\dots+(k-1)+k=\frac{k(k+1)}{2}$

chci dokázat pro $k+1$: $1+2+\dots+(k-1)+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

nahradím prvních k členů součtu vlevo:

$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k^2+k+2(k+1)}{2}=\frac{k^2+2k+k+2}{2}$$

$$\frac{k^2+k+2k+2}{2}=\frac{k^2+2k+k+2}{2} \text{ obě strany se rovnají}$$

\Rightarrow vzorec platí pro všechna n

Př. 8: Je dáno n přímek v rovině, z nichž každé dvě jsou navzájem různoběžné a žádné tři neprocházejí tímž bodem. Tyto přímky rozdělují rovinu na $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ částí.

Dokaž platnost tohoto tvrzení.

Postupujeme podle kroků:

1. ověření pro $n=1$

$$\frac{1}{2}(n^2+n+2)=\frac{1}{2}(1^2+1+2)=2, \text{ je to pravda, 1 přímka rozděljuje rovinu na dvě části}$$

\Rightarrow pro $n=1$ rovnost platí

2. předpokládám, že rovnost platí pro k a dokazuji ji pro $k+1$

předpokládáme, že k přímek rozděluje rovinu na $\frac{1}{2}(k^2 + k + 2)$,

chceme dokázat, že $k + 1$ přímek rozděluje rovinu na $\frac{1}{2}[(k + 1)^2 + (k + 1) + 2]$, upravíme vztah,

který máme dokázat: $\frac{1}{2}[(k + 1)^2 + (k + 1) + 2] = \frac{1}{2}[k^2 + 2k + 1 + k + 1 + 2] = \frac{1}{2}[k^2 + 3k + 4]$

Teď odvodíme platnost vztahu pro $k + 1$ přímek.

Mám k přímek, které rozdělují rovinu na $\frac{1}{2}(k^2 + k + 2)$ částí. Přímka $k + 1$ protne všech

k stávajících přímek \Rightarrow rozdělí $k + 1$ dosavadních částí roviny na dvě \Rightarrow přibude $k + 1$ částí \Rightarrow počet částí roviny při $k + 1$ přímkách:

$$\frac{1}{2}(k^2 + k + 2) + (k + 1) = \frac{1}{2}(k^2 + k + 2 + 2k + 2) = \frac{1}{2}(k^2 + 3k + 4)$$

Dokázáno

Př. 9: Petáková:

strana 150/cvičení 103 b) d) f)

strana 150/cvičení 109

Shrnutí: Při dokazování druhého kroku matematické indukce využíváme indukční předpoklad.