

8.2.1 Aritmetická posloupnost I

Předpoklady: 8101, 8102, 8103, 8107

Pedagogická poznámka: V hodině rozdělím třídu na dvě skupiny a každá z nich dělá jeden z prvních dvou příkladů. Členy posloupností pak při kontrole vypíšu na tabuli, v průběhu hodiny se k nim ještě vracíme. Někteří studenti potřebují slyšet, že nejde o nic náročného a oba příklady jsou zcela jednoduché. Pokud někdo opravdu neví, navrhněte, aby si zkusil zjistit, jaká je situace po jedné hodině (o kilometr výše).

Př. 1: V továrně dokončí každou hodinu montáž 3 automobilů. Na začátku směny bylo ve skladu (po předchozí směně) 5 neodvezených automobilů. Kolik hotových automobilů bude na skladě na konci směny (po 8 hodinách), pokud v jejím průběhu žádný hotový automobil neodvezou? Příklad řeš jako rekurentní posloupnost.

Budeme sledovat počet automobilů po hodinách:

Začátek směny : $a_1 = 5$

po 1 hodině: $a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8$

po 2 hodinách: $a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11$

po 3 hodinách: $a_4 = a_3 + 3 = 11 + 3 = 14$

po 4 hodinách: $a_5 = a_4 + 3 = 14 + 3 = 17$

po 5 hodinách: $a_6 = a_5 + 3 = 17 + 3 = 20$

po 6 hodinách: $a_7 = a_6 + 3 = 20 + 3 = 23$

po 7 hodinách: $a_8 = a_7 + 3 = 23 + 3 = 26$

po 8 hodinách: $a_9 = a_8 + 3 = 26 + 3 = 29$

Na konci směny bude ve skladu 29 automobilů.

Př. 2: V zemské troposféře platí, že s rostoucí výškou klesá teplota. Vzrůst nadmořské výšky o 1 km znamená pokles teploty o $6,5^\circ\text{C}$. Urči teplotu v nadmořské výšce 5 km, pokud je při hladině moře 25°C . Příklad řeš jako rekurentně zadanou posloupnost.

Postupujeme podobně jako v předchozím příkladě, postupně počítáme teploty v jednotlivých výškách:

Při hladině moře: $t_1 = 25$

ve výšce 1 km: $t_2 = t_1 - 6,5 = 25 - 6,5 = 18,5$

ve výšce 2 km: $t_3 = t_2 - 6,5 = 18,5 - 6,5 = 12$

ve výšce 3 km: $t_4 = t_3 - 6,5 = 12 - 6,5 = 5,5$

ve výšce 4 km: $t_5 = t_4 - 6,5 = 5,5 - 6,5 = -1$

ve výšce 5 km: $t_6 = t_5 - 6,5 = -1 - 6,5 = -7,5$

Ve výšce 5 km je teplota $-7,5^\circ\text{C}$.

Př. 3: Najdi společnou speciální vlastnost obou předchozích posloupností.

U obou předchozích posloupností platí, že rozdíl mezi dvěma sousedními členy v posloupnosti je konstantní (v prvním případě jsme pořád přičítali stejné číslo, ve druhém případě jsme stále stejné číslo odečítali).

Posloupnost s uvedenou vlastností se nazývá **aritmetická**.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá aritmetická, právě když existuje takové číslo d , že pro každé přirozené číslo n platí $a_{n+1} = a_n + d$. Číslo d se nazývá **diference posloupnosti**.

Pro diferenci platí: $d = a_{n+1} - a_n$ a tím se vysvětluje i její pojmenování.

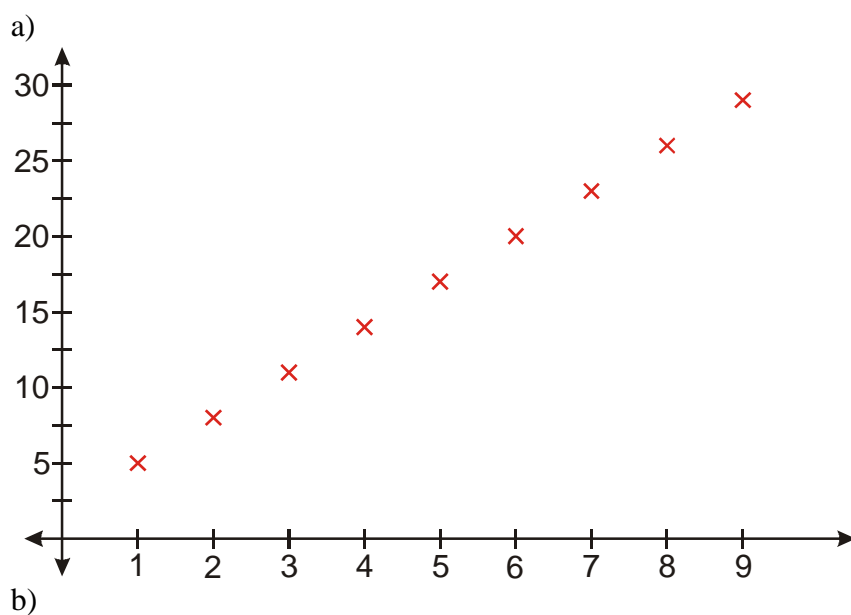
Př. 4: Urči difference aritmetických posloupností z příkladů 1 a 2.

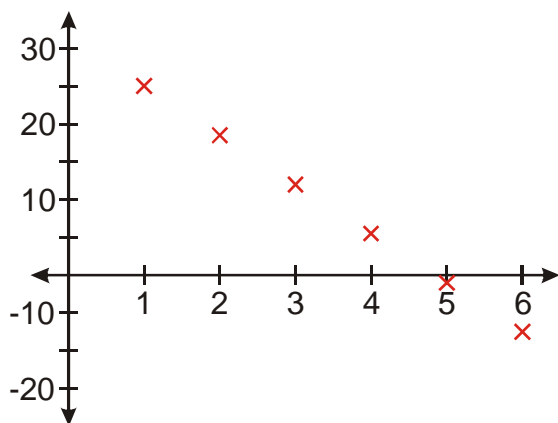
a) v příkladu 1 platí: $a_{n+1} = a_n + 3 \Rightarrow d = 3$

b) v příkladu 2 platí: $a_{n+1} = a_n - 6,5 \Rightarrow d = -6,5$

Pedagogická poznámka: Jako obvykle v těchto situacích. Příklad není zbytečný, někteří teprve nyní začínají vnímat předchozí definici.

Př. 5: Načrtni grafy aritmetických posloupností z příkladů 1 a 2. Jaký typ funkce je analogií aritmetické posloupnosti?





V obou případech leží všechny body grafu v přímce \Rightarrow aritmetická posloupnost je speciální případ lineární funkce.

Dodatek: Předchozí závěr je zřejmý i z faktu, že diference (tedy rozdíl mezi následujícími hodnotami) je stále stejná.

Pedagogická poznámka: Opět se objeví tací, kteří nakreslí místo bodů plné čáry.

Př. 6: Rozhodni, zda daná tři čísla tvoří tři po sobě jdoucí členy nějaké aritmetické posloupnosti. Pokud ano, urči diferenci.

a) $\frac{1}{6}; \frac{7}{12}; 1$ b) $(x-2)^2; (x-1)^2; x^2 - 3$

Pokud zadaná trojice čísel tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, musí být jejich rozdíl obou sousedních čísel shodný.

a) $\frac{1}{6}; \frac{7}{12}; 1$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{7}{12} - \frac{1}{6} = \frac{7-2}{12} = \frac{5}{12}$$

$$a_{n+1} - a_n = 1 - \frac{7}{12} = \frac{12-7}{12} = \frac{5}{12}$$

Jde o tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti s diferencí $\frac{5}{12}$.

b) $(x-2)^2; (x-1)^2; x^2 - 3$

$$a_n - a_{n-1} = (x-1)^2 - (x-2)^2 = (x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 4x + 4) = 2x - 3$$

$$a_{n+1} - a_n = (x^2 - 3) - (x-1)^2 = x^2 - 3 - (x^2 - 2x + 1) = 2x - 4$$

Nejde o tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, rozdíly po sobě jdoucích čísel jsou různé.

Pedagogická poznámka: Občas se objeví žák, který neřeší bod b) předchozího příkladu obecně, ale dosadí (nejčastěji $x = 1$) a spočte rozdíly ze získaných hodnot. Pokud nechce pochopit, že dokázal něco pouze pro použitou hodnotu neznámé, nechávám ho vyřešit stejný příklad pro trojici čísel $x-1; 2x-1; x^2 + 2x$.

Př. 7: Najdi důvod, proč můžeme o posloupnosti $(3n-1)_{n=1}^{\infty}$ tvrdit, že je aritmetická. Dokaž tuto její vlastnost.

Na výraz $3n-1$ se můžeme koukat jako na předpis lineární funkce $y = 3x-1$.

Podmínka, která odlišuje aritmetickou posloupnost od ostatních posloupností \Rightarrow musíme dokázat, že platí: $a_{n+1} = a_n + d$.

$$a_n = 3n-1 \qquad a_{n+1} = 3(n+1)-1 = 3n+2$$

$$\text{Dosadíme: } a_{n+1} - a_n = 3n+2 - (3n-1) = 3 = d.$$

Rozdíl dvou po sobě jdoucích členů je konstantní \Rightarrow posloupnost $(3n-1)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická (s diferencí 3).

Pedagogická poznámka: I když nejde o nic jiného než zopakování příkladu 6, mají studenti se 7 značné problémy.

Aritmetická posloupnost je speciální případ lineární funkce, průběh aritmetické posloupnosti je pravidelný \Rightarrow měl by existovat vzorec pro n -tý člen.

Př. 8: Najdi vzorec pro n -tý člen posloupností z příkladů 1 a 2. Vzorec hledej ve tvaru, který obsahuje první člen posloupnosti a její diferencí. Vyslov hypotézu o vzorci aritmetické posloupnosti: $a_1; a_{n+1} = a_n + d; n \in N$.

a) Zkusíme si upravovat členy posloupnosti tak, aby byl každý vyjádřen pomocí a_1 a d :

$$a_1 = 5 \qquad (\text{na začátku směny})$$

$$a_2 = a_1 + 3 = a_1 + 1 \cdot 3 = 8$$

$$a_3 = a_2 + 3 = a_1 + 3 + 3 = 5 + 2 \cdot 3 = 11$$

$$a_4 = a_3 + 3 = a_1 + 3 + 3 + 3 = 5 + 3 \cdot 3 = 14$$

$$a_5 = a_4 + 3 = a_1 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 + 4 \cdot 3 = 17$$

....

$$a_n = a_{n-1} + 3 = 5 + (n-1) \cdot 3$$

Zdá se, že posloupnost by mohla být dána vzorcem $[5 + (n-1) \cdot 3]_{n=1}^{\infty}$.

b) Zkusíme si upravovat členy posloupnosti tak, aby byl každý vyjádřen pomocí a_1 a d :

$$t_1 = 25 \qquad (\text{na hladině moře})$$

$$t_2 = t_1 - 6,5 = t_1 - 1 \cdot 6,5 = 18,5$$

$$t_3 = t_2 - 6,5 = t_1 - 6,5 - 6,5 = t_1 + 2 \cdot (-6,5) = 12$$

$$t_4 = t_3 - 6,5 = t_1 - 6,5 - 6,5 - 6,5 = t_1 + 3 \cdot (-6,5) = 5,5$$

$$t_5 = t_4 - 6,5 = t_1 - 6,5 - 6,5 - 6,5 - 6,5 = t_1 + 4 \cdot (-6,5) = -1$$

....

$$t_n = t_{n-1} - 6,5 = t_1 + (n-1) \cdot (-6,5)$$

Zdá se, že posloupnost by mohla být dána vzorcem $[25 + (n-1) \cdot (-6,5)]_{n=1}^{\infty}$.

Oba odvozené vzorce mají stejný tvar: $a_1 + (n-1)d \Rightarrow$ zřejmě platí: n -tý člen aritmetické posloupnosti je dán vzorcem $\left[a_1 + (n-1)d \right]_{n=1}^{\infty}$.

Pedagogická poznámka: Tady je potřeba hlídat studenty (spíše ty chytřejší). Často odvozují vzorec ve tvaru $\left[a_1 + n \cdot d \right]_{n=1}^{\infty}$ a tento vzorec jim dokonce dává i správné výsledky, protože v příkladech jako je 1 nebo 2 indexují od 0. Například počet aut ve skladu po osmi hodinách práce pro ně není a_9 , ale a_8 (bezpochyby je to i logičtější). Je nutné, aby si studenti ujasnili, že u posloupností značíme a_1 první člen, tedy člen, ke kterému se difference nepřičítala ještě ani jednou a proto se při cestě ke členu a_n přičítala pouze $(n-1)$ krát (index zkrátka nesouvisí s počtem přičítání difference, ale umístěním členu v řadě).

O správnosti naší hypotézy se musíme přesvědčit. Zkusíme důkaz matematickou indukcí:

Př. 9: Dokaž větu: V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí d platí pro každé $n \in \mathbb{N}$
 $a_n = a_1 + (n-1)d$.

1. Ověříme platnost pro $n = 1$:

$$a_1 = a_1 + (1-1)d = a_1 + 0 \cdot d = a_1 \Rightarrow \text{pro } n = 1 \text{ vzorec platí}$$

2. Předpokládáme, že vzorec platí pro k a dokazujeme, že platí i pro $k+1$:

$$\text{Víme: } a_k = a_1 + (k-1)d$$

$$\text{Chceme dokázat: } a_{k+1} = a_1 + [(k+1)-1]d = a_1 + k \cdot d$$

$$\text{Určitě platí rekurentní vztah pro aritmetickou posloupnost: } a_{k+1} = a_k + d$$

$$\text{Dosadíme do rekurentního vyjádření za } a_k = a_1 + (k-1)d :$$

$$a_{k+1} = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd - d + d = a_1 + kd \text{ (to jsme chtěli).}$$

Podařilo se nám vztah dokázat.

Pedagogická poznámka: Pokud nestíháme, předchozí příklad vynecháváme a důkaz buď rychle udělám na tabuli, nebo ho úplně přeskočíme.

Ted' už můžeme napsat s jistotou:

$$\text{V aritmetické posloupnosti } (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ s diferencí } d \text{ platí pro každé } n \in \mathbb{N} \\ a_n = a_1 + (n-1)d$$

Př. 10: Petáková:

strana 67/cvičení 9 a)

strana 67/cvičení 10 a)

strana 67/cvičení 11 a) b) c)

strana 67/cvičení 15 a) b)

Shrnutí: Posloupnost, jejíž po sobě následující členy se liší o stejné číslo, se nazývá aritmetická. Při výpočtu jejího n -tého členu přičítáme k prvnímu členu diferenci $(n-1)$ krát.