8.2.1 Aritmetická posloupnost I

Předpoklady: 8101, 8102, 8103, 8107

Pedagogická poznámka: V hodině rozdělím třídu na dvě skupiny a každá z nich dělá jeden z prvních dvou příkladů. Členy posloupností pak při kontrole vypíšu na tabuli, v průběhu hodiny se k nim ještě vracíme.
Někteří studenti potřebují slyšet, že nejde o nic náročného a oba příklady jsou zcela jednoduché. Pokud někdo opravdu neví, navrhněte, aby si zkusil zjistit, jaká je situace po jedné hodině (o kilometr výše).

Př. 1: V továrně dokončí každou hodinu montáž 3 automobilů. Na začátku směny bylo ve skladu (po předchozí směně) 5 neodvezených automobilů. Kolik hotových automobilů bude na skladě na konci směny (po 8 hodinách), pokud v jejím průběhu žádný hotový automobil neodvezou? Příklad řeš jako rekurentní posloupnost.

Budeme sledovat počet automobilů po hodinách:

Začátek směny : $a_1 = 5$

po 1 hodině: $a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8$

po 2 hodinách: $a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11$

po 3 hodinách: $a_4 = a_3 + 3 = 11 + 3 = 14$

po 4 hodinách: $a_5 = a_4 + 3 = 14 + 3 = 17$

po 5 hodinách: $a_6 = a_5 + 3 = 17 + 3 = 20$

po 6 hodinách: $a_7 = a_6 + 3 = 20 + 3 = 23$

po 7 hodinách: $a_8 = a_7 + 3 = 23 + 3 = 26$

po 8 hodinách: $a_9 = a_8 + 3 = 26 + 3 = 29$

Na konci směny bude ve skladu 29 automobilů.

Př. 2: V zemské troposféře platí, že s rostoucí výškou klesá teplota. Vzrůst nadmořské výšky o 1 km znamená pokles teploty o $6,5°\mathrm{C}$. Urči teplotu v nadmořské výšce 5 km, pokud je při hladině moře $25°\mathrm{C}$. Příklad řeš jako rekurentně zadanou posloupnost.

Postupujeme podobně jako v předchozím příkladě, postupně počítáme teploty v jednotlivých výškách:

Při hladině moře: $t_1 = 25$

ve výšce 1 km: $t_2 = t_1 - 6,5 = 25 - 6,5 = 18,5$

ve výšce 2 km: $t_3 = t_2 - 6,5 = 18,5 - 6,5 = 12$

ve výšce 3 km: $t_4 = t_3 - 6,5 = 12 - 6,5 = 5,5$

ve výšce 4 km: $t_5 = t_4 - 6,5 = 5,5 - 6,5 = -1$

ve výšce 5 km: $t_6 = t_5 - 6,5 = -1 - 6,5 = -7,5$

Ve výšce 5 km je teplota $-7,5°\mathrm{C}$.

Př. 3: Najdi společnou speciální vlastnost obou předchozích posloupností.

U obou předchozích posloupností platí, že rozdíl mezi dvěma sousedními členy v posloupnosti je konstantní (v prvním případě jsme pořád přičítali stejné číslo, ve druhém případě jsme stále stejné číslo odečítali).

Posloupnost s uvedenou vlastností se nazývá **aritmetická**.

Posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá aritmetická, právě když existuje takové číslo *d*, že pro každé přirozené číslo *n* platí $a_{n+1} = a_n + d$. Číslo ***d*** se nazývá **diference posloupnosti**.

Pro diferenci platí: $d = a_{n+1} - a_n$ a tím se vysvětluje i její pojmenování.

Př. 4: Urči diference aritmetických posloupností z příkladů 1 a 2.

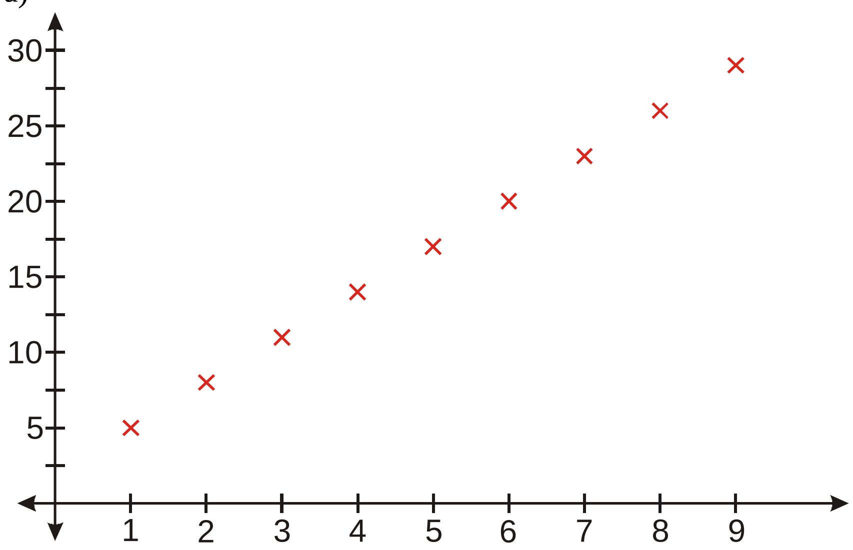
a) v příkladu 1 platí: $a_{n+1} = a_n + 3 \Rightarrow d = 3$

b) v příkladu 2 platí: $a_{n+1} = a_n - 6,5 \Rightarrow d = -6,5$

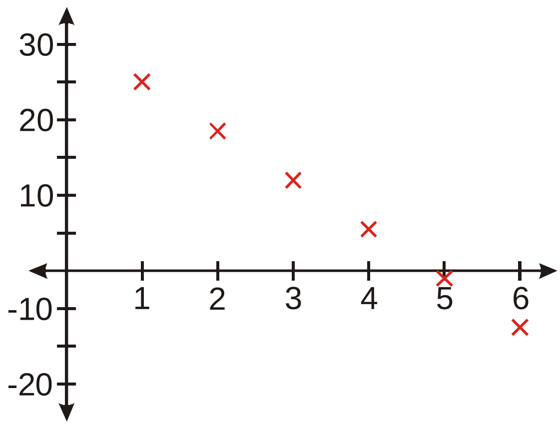
Pedagogická poznámka: Jako obvykle v těchto situacích. Příklad není zbytečný, někteří teprve nyní začínají vnímat předchozí definici.

Př. 5: Načrtni grafy aritmetických posloupností z příkladů 1 a 2. Jaký typ funkce je analogií aritmetické posloupnosti?

a)



b)



V obou případech leží všechny body grafu v přímce $\Rightarrow$ aritmetická posloupnost je speciální případ lineární funkce.

Dodatek: Předchozí závěr je zřejmý i faktu, že diference (tedy rozdíl mezi následujícími hodnotami) je stále stejná.

Pedagogická poznámka: Opět se objeví tací, kteří nakreslí místo bodů plné čáry.

Př. 6: Rozhodni, zda daná tři čísla tvoří tři po sobě jdoucí členy nějaké aritmetické posloupnosti. Pokud ano, urči diferenci.

a) $\frac{1}{6};\frac{7}{12};1$ b) $(x-2)^2;(x-1)^2;x^2-3$

Pokud zadaná trojice čísel tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, musí být jejich rozdíl obou sousedních čísel shodný.

a) $\frac{1}{6};\frac{7}{12};1$

$$a_n-a_{n-1}=\frac{7}{12}-\frac{1}{6}=\frac{7-2}{12}=\frac{5}{12}$$

$$a_{n+1}-a_n=1-\frac{7}{12}=\frac{12-7}{12}=\frac{5}{12}$$

Jde o tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti s diferencí $\frac{5}{12}$.

b) $(x-2)^2;(x-1)^2;x^2-3$

$$a_n-a_{n-1}=(x-1)^2-(x-2)^2=(x^2-2x+1)-(x^2-4x+4)=2x-3$$

$$a_{n+1}-a_n=(x^2-3)-(x-1)^2=x^2-3-(x^2-2x+1)=2x-4$$

Nejde o tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, rozdíly po sobě jdoucích čísel jsou různé.

Pedagogická poznámka: Občas se objeví žák, který neřeší bod b) předchozího příkladu obecně, ale dosadí (nejčastěji $x=1$) a spočte rozdíly ze získaných hodnot. Pokud nechce pochopit, že dokázal něco pouze pro použitou hodnotu neznámé, nechávám ho vyřešit stejný příklad pro trojici čísel $x-1;2x-1;x^2+2x$.

Př. 7: Najdi důvod, proč můžeme o posloupnosti $\left(3n-1\right)_{n=1}^{\infty}$ tvrdit, že je aritmetická. Dokaž tuto její vlastnost.

Na výraz $3n-1$ se můžeme koukat jako na předpis lineární funkce $y=3x-1$.
Podmínka, která odlišuje aritmetickou posloupnost od ostatních posloupností $\Rightarrow$ musíme dokázat, že platí: $a_{n+1}=a_n+d$.

$a_n=3n-1$ $\qquad$ $a_{n+1}=3\left(n+1\right)-1=3n+2$

Dosadíme: $a_{n+1}-a_n=3n+2-\left(3n-1\right)=3=d$.

Rozdíl dvou po sobě jdoucích členů je konstantní $\Rightarrow$ posloupnost $\left(3n-1\right)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická (s diferencí 3).

Pedagogická poznámka: I když nejde o nic jiného než zopakování příkladu 6, mají studenti se 7 značné problémy.

Aritmetická posloupnost je speciální případ lineární funkce, průběh aritmetické posloupnosti je pravidelný $\Rightarrow$ měl by existovat vzorec pro *n*-tý člen.

Př. 8: Najdi vzorec pro *n*-tý člen posloupností z příkladů 1 a 2. Vzorec hledej ve tvaru, který obsahuje první člen posloupnosti a její diferenci. Vyslov hypotézu o vzorci aritmetické posloupnosti: $a_1; a_{n+1}=a_n+d; n\in N$.

a) Zkusíme si upravovat členy posloupnosti tak, aby byl každý vyjádřen pomocí a_1 a *d*:

$a_1=5$ $\qquad$ (na začátku směny)

$a_2=a_1+3=a_1+1\cdot 3=8$

$a_3=a_2+3=a_1+3+3=5+2\cdot 3=11$

$a_4=a_3+3=a_1+3+3+3=5+3\cdot 3=14$

$a_5=a_4+3=a_1+3+3+3+3=5+4\cdot 3=17$

….

$a_n=a_{n-1}+3=5+\left(n-1\right)\cdot 3$

Zdá se, že posloupnost by mohla být dána vzorcem $\left[5+\left(n-1\right)\cdot 3\right]_{n=1}^{\infty}$.

b) Zkusíme si upravovat členy posloupnosti tak, aby byl každý vyjádřen pomocí a_1 a *d*:

$t_1=25$ $\qquad$ (na hladině moře)

$t_2=t_1-6,5=t_1-1\cdot 6,5=18,5$

$t_3=t_2-6,5=t_1-6,5-6,5=t_1+2\cdot\left(-6,5\right)=12$

$t_4=t_3-6,5=t_1-6,5-6,5-6,5=t_1+3\cdot\left(-6,5\right)=5,5$

$t_5=t_4-6,5=t_1-6,5-6,5-6,5-6,5=t_1+4\cdot\left(-6,5\right)=-1$

….

$t_n=t_{n-1}-6,5=t_1+\left(n-1\right)\cdot\left(-6,5\right)$

Zdá se, že posloupnost by mohla být dána vzorcem $\left[25+\left(n-1\right)\cdot\left(-6,5\right)\right]_{n=1}^{\infty}$.

Oba odvozené vzorce mají stejný tvar: $a_1 + (n-1)d \Rightarrow$ zřejmě platí: *n*-tý člen aritmetické posloupnosti je dán vzorcem $\left[a_1 + (n-1)d\right]_{n=1}^{\infty}$.

Pedagogická poznámka: Tady je potřeba hlídat studenty (spíše ty chytřejší). Často odvozují vzorec ve tvaru $\left[a_1 + n \cdot d\right]_{n=1}^{\infty}$ a tento vzorec jim dokonce dává i správné výsledky, protože v příkladech jako je 1 nebo 2 indexují od 0. Například počet aut ve skladu po osmi hodinách práce pro ně není a_9, ale a_8 (bezpochyby je to i logičtější). Je nutné, aby si studenti ujasnili, že u posloupností značíme a_1 první člen , tedy člen, ke kterému se diference nepřičítala ještě ani jednou a proto se při cestě ke členu a_n přičítala pouze $(n-1)$krát (index zkrátka nesouvisí s počtem přičítání diference, ale umístěním členu v řadě).

O správnosti naší hypotézy se musíme přesvědčit. Zkusíme důkaz matematickou indukcí:

Př. 9: Dokaž větu: V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí *d* platí pro každé $n \in N$ $a_n = a_1 + (n-1)d$.

1. Ověříme platnost pro $n = 1$:

$a_1 = a_1 + (1-1)d = a_1 + 0 \cdot d = a_1 \Rightarrow$ pro $n = 1$ vzorec platí

2. Předpokládáme, že vzorec platí pro k a dokazujeme, že platí i pro $k+1$:

Víme: $a_k = a_1 + (k-1)d$.

Chceme dokázat: $a_{k+1} = a_1 + \left[(k+1)-1\right]d = a_1 + k \cdot d$.

Určitě platí rekurentní vztah pro aritmetickou posloupnost: $a_{k+1} = a_k + d$.

Dosadíme do rekurentního vyjádření za $a_k = a_1 + (k-1)d$:

$a_{k+1} = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd - d + d = a_1 + kd$ (to jsme chtěli).

Podařilo se nám vztah dokázat.

Pedagogická poznámka: Pokud nestíháme, předchozí příklad vynecháváme a důkaz buď rychle udělám na tabuli nebo ho úplně přeskočíme.

Teď už můžeme napsat s jistotou:

V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí *d* platí pro každé $n \in N$

$a_n = a_1 + (n-1)d$.

Př. 10: Petáková:

strana 67/cvičení 9 a)
strana 67/cvičení 10 a)
strana 67/cvičení 11 a) b) c)
strana 67/cvičení 15 a) b)

Shrnutí: Posloupnost jejíž po sobě následující členy se liší o stejné číslo se nazývá aritmetická. Při výpočtu jejího *n*-tého členu přičítáme k prvnímu členu diferenci $(n-1)$ krát.