8.2.3 Vzorce pro aritmetickou posloupnost

Předpoklady: 8202

Př. 1: Pro aritmetickou posloupnost platí $a_5 = 3$; $d = 2$. Urči člen a_9 aniž bys určoval a_1.

Mohli bychom pomocí vzorce pro *n*-tý člen určit člen a_1 a pak pomocí stejného vzorce určit i a_9. Tento postup zakazuje zadání příkladu a je složitější.
Zkusíme to jinak:
Abychom se od členu a_5 dostali ke členu a_9, musíme čtyřikrát ($9-5=4$) přičítat diferenci
$\Rightarrow$ $a_9 = a_5 + 4 \cdot d = 3 + 4 \cdot 2 = 11$.
Člen a_9 se rovná 11.

Př. 2: V aritmetické posloupnosti s diferencí *d* vypočítej hodnotu členu a_s, pokud znáš hodnotu a_r.

Je to stejný příklad jako předchozí, akorát postupujeme obecně.
Ke členu a_r přičteme diferenci *d* a to $(s-r)$ krát $\Rightarrow$ $a_s = a_r + (s-r)d$.

Vzorec funguje i pro výpočet předchozího členu. Dosadíme hodnoty z příkladu 1:
$d = 2$, $a_9 = 11$, počítáme člen $a_5 = a_9 + (5-9)d = 11 + (5-9)2 = 3$.

V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí *d* platí pro všechna $r, s \in N$
$a_s = a_r + (s-r)d$.

Vzorec je možné snadno interpretovat slovně: určitý člen v posloupnosti vypočtu z libovolného předchozího (následujícího) tak, že k jeho hodnotě připočtu (odečtu) tolikrát diferenci, o kolik je jeho index větší (menší).

Př. 3: (BONUS) Dokaž pomocí vzorce pro *n*-tý člen aritmetické posloupnosti platnost vzorce $a_s = a_r + (s-r)d$.

Pro členy posloupnosti ve vzorci platí: $a_r = a_1 + (r-1)d$, $a_s = a_1 + (s-1)d$.
Rovnice odečteme: $a_s - a_r = a_1 - a_1 + (s-1)d - (r-1)d$

$$a_s - a_r = d\left[(s-1)-(r-1)\right]$$

$$a_s - a_r = d(s-r)$$

$$a_s = a_r + d(s-r)$$

Dodatek: Nám už známý vzorec pro *n*-tý člen aritmetické posloupnosti není nic jiného než speciální případ vzorce $a_s = a_r + (s-r)d$, kdy dosadíme $s = n$ a $r = 1$.

Př. 4: V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dány členy $a_4 = 6$, $a_{11} = 34$. Urči *d*, a_1 a a_8.

Dosadíme do vztahu mezi a_r a a_s: $a_s = a_r + (s-r)d$.

$a_{11} = a_4 + (11-4)d$
$34 = 6 + 7d$
$7d = 28$
$d = 4$

Teď určíme a_1: $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_4 = a_1 + (4-1)d$.

$6 = a_1 + 3 \cdot 4$
$a_1 = -6$

Teď už snadno dopočítáme libovolný člen posloupnosti, známe vzorec pro *n*-tý člen:

$a_n = a_1 + (n-1)d = -6 + (n-1)4$
$a_8 = -6 + (8-1)4 = 22$

Pro zadanou posloupnost platí: $d = 4$, $a_1 = -6$, $a_8 = 22$.

Dodatek: Protože vzorec nevyžaduje, abychom do něj dosazovali za *s* větší číslo než za *r*, můžeme předchozí příklad počítat i takto: $a_s = a_r + (s-r)d$

$a_4 = a_{11} + (4-11)d$
$6 = 34 - 7d$
$7d = 28 \Rightarrow d = 4$.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti řeší předchozí příklad zpaměti bez vzorců. Není třeba proti tomu bojovat, už v následujícím příkladu většinou ztroskotají na „ošklivějších“ číslech. Když se s nimi bavím, pouze se jim snažím ukázat, že i jejich výpočet v podstatě kopíruje výpočet pomocí vzorce a jeho použití je „jistota“ v nepříznivých podmínkách.

Př. 5: V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dány členy $a_7 = 2$, $a_{10} = -2$. Urči *d*, a_1 a a_{20}.

Dosadíme do vztahu mezi a_r a a_s: $a_s = a_r + (s-r)d$

$a_{10} = a_7 + (10-7)d$
$-2 = 2 + 3d$
$3d = -4$
$d = -\frac{4}{3}$

Teď určíme a_1:

$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_7 = a_1 + (7-1)d$

$2 = a_1 + 6 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)$

$2 = a_1 - 8$

$a_1 = 10$

Teď už snadno dopočítáme libovolný člen posloupnosti, známe vzorec pro n-tý člen:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 10 + (n-1)\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$a_{20} = 10 + (20-1)\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{46}{3} = -15\frac{1}{3}$$

Pro zadanou posloupnost platí: $d = -\frac{4}{3}$, $a_1 = 10$, $a_{20} = -\frac{46}{3}$.

Př. 6: Na referátu cizinecké policie je pro žadatele o pracovní víza vymyšlen neuvěřitelně průhledný a přívětivý systém. Jeho součástí je i způsob podávání žádostí. Ráno na začátku pracovní doby je všem uchazečům rozdáno pořadové číslo, podle kterého pak mohou podávat žádosti. Uchazeči bez pořadového čísla nemohou žádost podat. Čekající jsou do kanceláře zváni přibližně rovnoměrně.
V kolik hodin má cenu se vrátit do čekárny s pořadovým číslem 87, pokud po třech hodinách přišel na řadu žadatel s číslem 21, po pěti hodinách žadatel s číslem 45? Kolik lidí s pořadovým číslem z předešlého dne stálo na začátku fronty? Kde se vzalo v krabici od bot obyčejného policejního úředníka 7 miliónů korun v hotovosti?

Pokud zveme čekající rovnoměrně tvoří pořadová čísla pozvaných v celých hodinách členy aritmetické posloupnosti.
Pozor: První člen posloupnosti není 1, protože na začátku museli být uspokojeni čekající z předešlého dne.

po třech hodinách … $a_4 = 21$

po pěti hodinách … $a_6 = 45$

Můžeme spočítat všechny ostatní členy posloupnosti:

$$a_s = a_r + (s-r)d$$

$$a_6 = a_4 + (6-4)d$$

$$45 = 21 + 2d$$

$$2d = 24 \Rightarrow d = 12$$

Určíme první člen: $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_4 = a_1 + (4-1)d$

$$21 = a_1 + (4-1)\cdot 12$$

$$21 = a_1 + 36$$

$$a_1 = -15$$

Určíme po kolika hodinách přijde na řadu číslo 87:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$87 = -15 + (n-1)\cdot 12$$

$$(n-1)\cdot 12 = 102$$

$n = \frac{102}{12} + 1 = 9,5$ - Je třeba přijít po osmi a půl hodině.

S pořadovým číslem 102 má cenu se vracet po 8 hodinách (přesněji po 8 hodinách a 30 minutách), což znamená s velkou pravděpodobností čekat do dalšího dne. Od včerejšího dne zůstalo 16 čekajících (musíme započítat i toho, který by „měl" v našem počítání pořadové číslo 0).

Jinak způsob, jakým probíhá přidělování víz a povolení k pobytu ať už zde nebo na našich ambasádách v zahraničí, patří mezi velké ostudy našeho státu a 7 miliónů v krabici od bot beze všech rozumných pochybností pochází z úplatků. Právě fakt, že stará zásada trestního řízení spočívající v tom, že vina musí být prokázána „nade vší rozumnou pochybnost“ („beyond all reasonable doubt“), zdegenerovala v české justici na zásadu „nade vší pochybnost“, má velký podíl na tom, že je vcelku bezpečné páchat některé druhy trestné činnosti. Výmluvám, které souzení v takových případech používají (nález v lese, dědictví po babičce …) totiž může věřit pouze naivka nebo český soudce.

Pedagogická poznámka: Zbývající část hodiny doporučuji probrat v jiné (poloviční) hodině.

Nyní se přesuneme o několik století zpátky, na konec 18 století do Brunšviku. Do zdejší základní školy chodí také malý Carl Friedrich Gauss (matematiky familiérně zvaný Gaussík). I přes svůj nízký věk má pověst mimořádného matematického talentu. Pan učitel už má dneska dětí plné zuby. Pořád vyrušují, nedávají pozor, neustále má někdo nějaké dotazy. A on by si při tom tam tak potřeboval odškrtat třídnici. Rozhoduje se použít svůj oblíbený trik, zadává dětem obtížnou a zdlouhavou práci - sečíst všechna čísla od jedné do sta. To jim bude trvat minimálně hodinu.
Bohudík dneska má opravdu smůlu. Sotva dosedl ke třídnici, ke stolu už běží Gaussík a křičí, že příklad spočítal a správný výsledek je 5050.
Zkoprnělý učitel správný výsledek samozřejmě nezná a tak ještě zkusí oponovat tím, že přece není možné tak rychle sečíst tolik čísel. Gaussík hned vysvětluje, že on rozhodně všechna čísla nesčítal, prý stačí….

Př. 7: Vysvětli, jak Gaussík došel ke správnému výsledku, bez postupného sečtení všech čísel.

…stačí, když si čísla v součtu (v posloupnosti) spojíme do dvojic:

1+2+3+4+5+6+...+95+96+97+98+99+100

Všechny dvojice mají stejný součet 101.
Dvojic je celkem 50 (poslední dvojici tvoří čísla 50 a 51) $\Rightarrow$ sčítáme 50 dvojic po 101 $\Rightarrow$ součet se rovná 5050.

Podobně můžeme sečíst i prvních *n* členů libovolné aritmetické posloupnosti $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$.
Napíšeme si součet: $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = s_n$.
Napíšeme si ho ještě jednou v obráceném pořadí: $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1 = s_n$.
Obě rovnosti sečteme:
$$\begin{aligned} a_1 + \ \ a_2 + \ \ a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n &= s_n \\ a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + \ \ a_2 + \ \ a_1 &= s_n \end{aligned}$$
a získáme: $\left(a_1 + a_n\right) + \left(a_2 + a_{n-1}\right) + \left(a_3 + a_{n-2}\right) + ... + \left(a_{n-2} + a_3\right) + \left(a_{n-1} + a_2\right) + \left(a_n + a_1\right) = 2s_n$.
Součty ve všech závorkách jsou stejné:
$\left(a_1 + a_n\right) = \left(a_2 + a_{n-1}\right) = \left(a_3 + a_{n-2}\right) = ... = \left(a_{n-2} + a_3\right) = \left(a_{n-1} + a_2\right) = \left(a_n + a_1\right)$.

Závorek je v součtu $n \Rightarrow$ můžeme psát: $n(a_1 + a_n) = 2s_n$.

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tedy pro $a_1 + a_2 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ platí: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

Př. 8: Urči součet: a) všech jednociferných přirozených čísel,
b) všech dvouciferných sudých čísel,
c) všech trojciferných násobků čísla 7.

a) součet všech jednociferných přirozených čísel

dosazujeme do vzorce $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$a_1 = 1$, $a_n = 9$, zřejmě $n = 9$

Zkontrolujeme hodnotu n vzorcem: $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 9 = 1 + (n-1) \cdot 1 \Rightarrow n = 9$.

Určíme součet: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{9}{2}(1+9) = 45$.

Výsledek můžeme snadno zkontrolovat i ručně.

b) součet všech dvouciferných sudých čísel

$a_1 = 10$, $a_n = 98$, $d = 2$

Hodnotu n určíme vzorcem: $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 98 = 10 + (n-1) \cdot 2$.

$88 = (n-1) \cdot 2$

$n = 44 + 1 = 45$

Určíme součet: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{45}{2}(10 + 98) = 2430$.

c) součet všech trojciferných násobků čísla 7

$a_1 = 105$, $a_n = 994$, $d = 7$

Hodnotu n určíme vzorcem: $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 994 = 105 + (n-1) \cdot 7$.

$889 = (n-1) \cdot 7$

$n = 127 + 1 = 128$

Určíme součet: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{128}{2}(105 + 994) = 70336$.

Pedagogická poznámka: Studenti většinou hodnotu *n* odhadují. Nebráním jim, ale při řešení bodu b) se objeví velké množství chyb právě při určování čísla *n*. Ačkoliv to na první pohled jde proti hlavnímu záměru učebnice, doporučuji na základě této zkušenosti studentům, aby si hodnotu *n* ověřovali výpočtem podle vzorce. Špatný odhad *n* je příčinou největšího počtu chyb a já sám s ním mám občas problémy.

Př. 9: (BONUS) Dokaž vzorec po součet prvních *n* členů aritmetické řady matematickou indukcí.

1. Ověříme vztah pro $n=1$

Sčítáme jediné číslo $a_1 = s_1$.

Dosadíme do vzorce: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow s_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_1) = \frac{2a_1}{2} = a_1$.

2. Předpokládáme platnost vztahu pro $n=k$ **a dokazujeme platnost pro** $n=k+1$**:**

Víme, že platí: $s_k = \frac{k}{2}(a_1 + a_k) = a_1 + a_2 + ... + a_k$.

Chceme dokázat, že platí: $s_{k+1} = \frac{k+1}{2}(a_1 + a_{k+1})$.

s_{k+1} je součet členů posloupnosti: $s_{k+1} = a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1}$.

Použijeme vzorec $s_k = \frac{k}{2}(a_1 + a_k) = a_1 + a_2 + ... + a_k \Rightarrow s_{k+1} = s_k + a_{k+1}$.

Napíšeme vztah: $s_{k+1} = s_k + a_{k+1} = \frac{k}{2}(a_1 + a_k) + a_{k+1}$, vzorec pro s_{k+1}, který potřebujeme odvodit, neobsahuje člen a_k, ale člen a_{k+1} $\Rightarrow$ v nehotovém vzorci musíme nahradit a_k členem a_{k+1}: $a_k = a_{k+1} - d$.

Diferenci si také musíme vyjádřit pomocí a_1, a_{k+1} a k:

$$a_{k+1} = a_1 + \left[(k+1)-1\right]d = a_1 + kd \Rightarrow d = \frac{a_{k+1} - a_1}{k} \Rightarrow a_k = a_{k+1} - d = a_{k+1} - \frac{a_{k+1} - a_1}{k}$$

Dosadíme do vztahu: $s_{k+1} = \frac{k}{2}(a_1 + a_k) + a_{k+1} = \frac{k}{2}\left(a_1 + a_{k+1} - \frac{a_{k+1} - a_1}{k}\right) + a_{k+1}$

$$s_{k+1} = \frac{k}{2}a_1 + \frac{k}{2}a_{k+1} - \frac{k}{2}\cdot\frac{a_{k+1} - a_1}{k} + a_{k+1} = \frac{k}{2}a_1 + \frac{k}{2}a_{k+1} - \frac{a_{k+1} - a_1}{2} + a_{k+1}$$

$$s_{k+1} = \frac{k \cdot a_1}{2} + \frac{k \cdot a_{k+1}}{2} - \frac{a_{k+1}}{2} + \frac{a_1}{2} + a_{k+1} = \frac{k \cdot a_1}{2} + \frac{a_1}{2} + \frac{k \cdot a_{k+1}}{2} - \frac{a_{k+1}}{2} + a_{k+1}$$

$$s_{k+1} = a_1\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right) + a_{k+1}\left(\frac{k}{2} - \frac{1}{2} + 1\right) = a_1\left(\frac{k+1}{2}\right) + a_{k+1}\left(\frac{k+1}{2}\right) = \frac{k+1}{2}(a_1 + a_{k+1})$$

Př. 10: Petáková:
strana 68/cvičení 19 a)
strana 68/cvičení 27
strana 68/cvičení 32

Shrnutí: Pokud si členy aritmetické posloupnosti vhodně spárujeme, můžeme je snadno sčítat.