8.2.4 Užití aritmetických posloupností

Předpoklady: 8201,8202

Př. 1: S hloubkou roste teplota Země přibližně rovnoměrně o $30°C$ na 1000 m. Jaká bude teplota na dně dolu hlubokého 900 m, je-li v hloubce 25 m teplota $9°C$? Jaká by byla teplota na dně jednoho z nejhlubších dolů na světě TauTona v JAR v hloubce 3585 m. Porovnej vypočítanou teplotu s teplotou uváděnou v literatuře a vysvětli rozdíl.

Ze zadání známe teplotu ve dvou hloubkách:
v hloubce 25 m … $a_{25} = 9$
v hloubce 1025 m … $a_{1025} = 39$ (hloubka o 1000 větší $\Rightarrow$ teplota o $30°C$ vyšší)
Pomocí vztahu mezi a_s a a_r můžeme určit diferenci posloupnosti:

$$a_s = a_r + (s-r)d \Rightarrow a_{1025} = a_{25} + (1025-25)d$$

$$39 = 9 + 1000d$$

$$d = \frac{3}{100}$$

Teď snadno určíme pomocí stejného vzorce teplotu v libovolné jiné hloubce:

$$a_{900} = a_{25} + (900-25)d = 9 + 875 \cdot \frac{3}{100} = 35,25°C$$

$$a_{3585} = a_{25} + (3585-25)d = 9 + 3560 \cdot \frac{3}{100} = 115,8°C$$

Za předpokladu, že teplota zemské kůry roste s hloubkou způsobem udaným v zadání by v hloubce 900 metrů byla teplota $35,25°C$, v hloubce 3585 metrů pak $115,8°C$.

Druhý výsledek je zjevně nereálný. Při takové teplotě by bylo pro horníky asi nemožné pracovat. V literatuře se uvádí,že v nejnižších patrech zmiňovaného dolu TauTona je teplota horniny kolem $60°C$, teplota vzduchu pak dosahuje asi $55°C$, klimatizací je snižována na přijatelných $35°C$.
Důvody zjištěného rozdílu jsou zřejmě dva:
1. Uvedený vzrůst teploty s hloubkou se týká pouze vrchní vrstvy zemské kůry, později roste teplota podstatně pomaleji (většina tepla do zemské kůry neproniká z pláště, ale vzniká v kůře rozpadem radioaktivních prvků, jejichž obsah je nejvyšší ve vyšších vrstvách).
2. Tepelná vodivost většiny hornin je velmi malá a tak je možné pomocí klimatizace ochladit povrch horniny na nižší teplotu (právě velmi malá tepelná vodivost hornin zemské kůry brání snadnému využití geotermální energie).

Pedagogická poznámka: Všechny následující příklady pocházejí z klasické učebnice od Doc. Odvárka. Za celý večer se mi nepodařilo vymyslet jiný reálný příklad, který by nebyl pouhou kopií se změněnými čísly. Pokud by autor učebnice protestoval mohu příklady samozřejmě stáhnout a nahradit analogiemi, ale sám vnímám tento fakt jako ocenění jeho práce, protože opravdu nenechal příliš věcí, které bych mohl změnit.

Pedagogická poznámka: Všechny dále uvedené příklady není v silách většiny studentů stihnout. Příklady tvoří podobné dvojice (příklady 2 a 3 a příklady 4 a 5). Řeším to tak, že studenti vždy řeší celý příklad 2 a 4. Příklady 3 a 5 pouze načínáme (uděláme soupis toho, jaký význam mají jednotlivá čísla v zadání z hlediska posloupností). Příklad 7 většina studentů není schopná vyřešit sama, ale i případě, že jej nestihneme ve škole, nic strašného se neděje, protože je možné příklad dostudovat doma.

Př. 2: V obchodě staví propagační pyramidu z plechovek. Kolik plechovek bude na pyramidu potřeba, pokud nejnižší řada obsahuje 25 plechovek a každá další řada má o jednu plechovku méně?

Napíšeme si, jaký význam mají jednotlivé zadané hodnoty z hlediska posloupností. Zbytek příkladu je pak pouhým dosazováním do vzorců.

$a_1 = 25$ - počet plechovek v nejnižší řadě

$a_n = 1$ - v poslední řadě je jediná plechovka

$d = -1$ - v každé další řadě je o jednu plechovku méně

$s_n = ?$ - chceme určit počet plechovek ve všech řadách

Určíme *n* pomocí vzorce pro *n*-tý člen: $a_n = a_1 + (n-1)d$

$1 = 25 + (n-1)(-1)$

$24 = (n-1)$

$n = 25$

Teď můžeme dosadit do vzorce pro s_n:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{25}{2}(25+1) = 325$$

Na stavbu pyramidy bude třeba 325 plechovek.

Z předchozích příkladů je dobře vidět, jakým způsobem se používají posloupnosti při řešení slovních úloh. Pokud je slovní úloha převoditelná na aritmetickou posloupnost stačí, když provedeme přiřazení zadaných hodnot k jednotlivým členům posloupností (případně součtu prvních *n* členů, diferenci …).

Př. 3: Část střechy domu má tvar lichoběžníku a je třeba pokrýt taškami. Víme, že do řady u hřebenu se vejde 85 tašek, do spodní řady při okapu 105 tašek. Při tom jsou tašky srovnány do řad tak, aby v každé následující řadě bylo o jednu tašku více než v řadě předchozí. Kolik je třeba tašek na pokrytí části střechy?

Napíšeme si, jaký význam mají jednotlivé zadané hodnoty z hlediska posloupností. Zbytek příkladu je pak pouhým dosazováním do vzorců.

$a_1 = 85$ - počet tašek v nejvyšší řadě

$a_n = 105$ - počet tašek v nejnižší řadě

$d = 1$ - v každé další řadě je o jednu tašku více

$s_n = ?$ - chceme určit počet tašek ve všech řadách

Určíme *n* pomocí vzorce pro *n*-tý člen: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

$105 = 85 + (n-1)1$

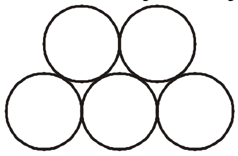
$20 = (n-1)$

$n = 21$

Teď můžeme dosadit do vzorce pro s_n: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{21}{2}(85+105) = 1995$.

Na pokrytí střechy budeme potřebovat 1995 tašek.

Př. 4: Ocelové roury se skládají do vrstev tak, že roury každé horní vrstvy zapadají do mezer dolní vrstvy. Do kolika vrstev se složí 95 rour, je-li v nejvyšší vrstvě 5 rour? Kolik rour je v nejnižší vrstvě?



Napíšeme si, jaký význam mají jednotlivé zadané hodnoty z hlediska posloupností. Zbytek příkladu je pak pouhým dosazováním do vzorců.

$a_1 = ?$ - počet rour v nejnižší vrstvě

$a_n = 5$ - počet rour v nejvyšší vrstvě

$d = -1$ - v každé další vrstvě je o jednu rouru méně

$s_n = 95$ - počet rour, které potřebujeme složit

Vyjdeme ze vztahu pro s_n: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow$ dvě neznámé $\Rightarrow$ potřebujeme další rovnici

vyjádříme si a_1 ze vztahu pro *n*-tý člen: $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_1 = a_n - (n-1)d$

Dosadíme: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[a_n - (n-1)d + a_n] = \frac{n}{2}[2a_n - (n-1)d]$.

Výsledná rovnice bude určitě kvadratická $\Rightarrow$ dosadíme konkrétní čísla:

$95 = \frac{n}{2}[2 \cdot 5 - (n-1)(-1)] \quad / \cdot 2$

$190 = n[10 + (n-1)]$

$190 = n(9+n)$

$n^2 + 9n - 190 = 0$

$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-190)}}{2 \cdot 1} = \frac{-9 \pm 29}{2}$

$n_1 = \frac{-9+29}{2} = 10$ $\qquad$ $n_2 = \frac{-9-29}{2} = -19$ - nedává smysl

Dopočítáme: $a_1 = a_n - (n-1)d = 5 - (10-1)(-1) = 14$.

Roury musíme složit do 10 vrstev, v nejnižší vrstvě bude 14 rour.

Př. 5: Hlediště letního kina je určeno pro přibližně 1200 diváků. Do první řady je plánováno 40 sedadel, do každé následující o čtyři sedadla více. Kolik řad sedadel bude mít hlediště?

Napíšeme si, jaký význam mají jednotlivé zadané hodnoty z hlediska posloupností. Zbytek příkladu je pak pouhým dosazováním do vzorců.

$a_1 = 40$ - počet sedadel v první řadě

$a_n = ?$ - počet sedadel v poslední řadě

$d = 4$ - v každé další řadě je o 4 sedadla více
$s_n = 1200$ - přibližný počet sedadel ve všech řadách

Vyjdeme ze vztahu pro s_n: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ $\Rightarrow$ dvě neznámé $\Rightarrow$ potřebujeme další rovnici

tou je vztah pro *n*-tý člen: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Dosadíme: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

Výsledná rovnice bude určitě kvadratická $\Rightarrow$ dosadíme konkrétní čísla:

$$1200 = \frac{n}{2}[2 \cdot 40 + (n-1)4]$$

$$1200 = \frac{n}{2}(80 + 4n - 4)$$

$$1200 = n(38 + 2n) \quad / : 2$$

$$600 = n^2 + 19n$$

$$n^2 + 19n - 600 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-600)}}{2 \cdot 1} \doteq \frac{-19 \pm 52,5}{2}$$

$n_1 = \frac{-19 + 52,5}{2} = 16,8$ $\qquad$ $n_1 = \frac{-19 - 52,5}{2} = \ldots$ - nedává smysl

Řad musí být celé číslo $\Rightarrow$ kino musí mít 17 řad sedadel.

Př. 6: Dělník obsluhuje 16 poloautomatických tkalcovských stavů. Výkon každého stroje je *x* metrů látky za jednu hodinu. První stav uvede dělník do chodu na začátku směny, každý další uvádí do činnosti vždy po dvou minutách. Kolik metrů látky vyrobí dělník na každém stavu v první hodině směny? Kolik metrů látky vyrobí celkem?

Podobný příklad jako předchozí, ale ve výsledcích se bude vyskytovat písmenko *x*.
Množství látky vyrobené stavem získáme, když vynásobíme dobu, po kterou byl stav zapnutý $\Rightarrow$ budeme počítat pouze časy a pak je vynásobíme *x*

doba činnosti prvního stavu v hodinách … 1

doba činnosti druhého stavu v hodinách … $1 - \frac{2}{60} = 1 - \frac{1}{30}$ (zapnutý po 2 minutách)

doba činnosti třetího stavu v hodinách … $1 - \frac{4}{60} = 1 - \frac{2}{30}$ (zapnutý po 4 minutách)

$\Rightarrow$

$a_1 = 1$

$d = -\frac{1}{30}$

$n = 16$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (16-1)\left(-\frac{1}{30}\right) = 1 - \frac{15}{30} = 0,5$$

doba, kterou pracovaly všechny stroj dohromady … s_n

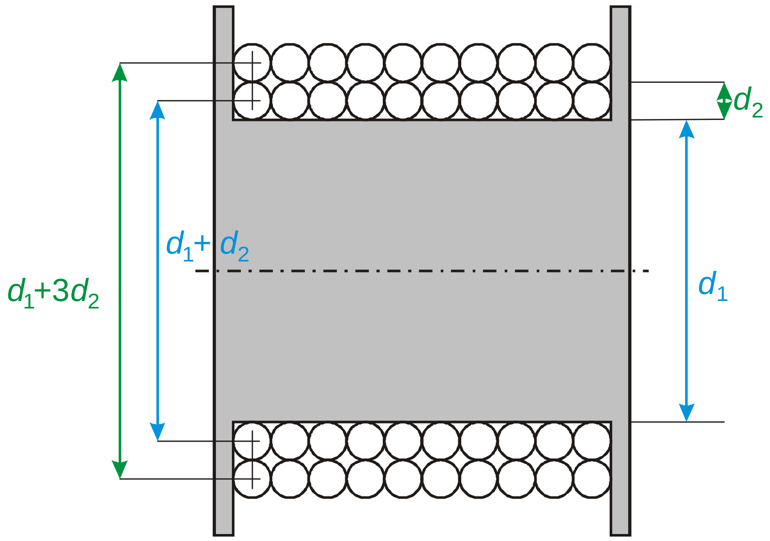
$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{16}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 8\frac{3}{2} = 12$$

Jednotlivé stavy vyrobily: $x, \left(1-\frac{1}{30}\right)x, ..., \left(1-\frac{15}{30}\right)x$ metrů látky

Všechny stroje dohromady vyrobily $12x$ metrů látky.

Př. 7: Na buben o průměru d_1 je navíjeno lano s průměrem d_2. V každé vrstvě je lano navinuto vedle sebe *m* krát. Urči, jaká je přibližná délka lana navinutého na buben v *n* vrstvách. Případ řeš obecně i konkrétně pro hodnoty $d_1 = 1,2\,\text{m}$, $d_2 = 0,04\,\text{m}$, $m = 30$, $n = 6$.

Nakreslíme obrázek:



Délka jednoho závitu v první vrstvě: $o = \pi d = \pi(d_1 + d_2)$ (jako poloměr kružnice bereme vzdálenost středů příčných průřezů lana, vyznačenou modře nalevo).

Délka všech závitů v první vrstvě: $m\pi(d_1 + d_2)$ (*m* závitů).

Průměr závitu druhé vrstvy je vlevo vyznačen zeleně (jde opět o vzdálenost středů příčných průřezů lana ve druhé vrstvě) $d = d_1 + 3d_3$.

Délka jednoho závitu v druhé vrstvě: $o = \pi d = \pi(d_1 + 3d_2)$.

Délka všech závitů v druhé vrstvě: $m\pi(d_1 + 3d_2)$ (*m* závitů).

Délka druhé vrstvy je větší, protože je namotána na první. Stejně tak délka třetí vrstvy bude delší než délka druhé a stejnou vzdálenost $\Rightarrow$ délky jednotlivých vrstev tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí $m\pi 2d_2$.

Délka *n*-té vrstvy:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = m\pi(d_1 + d_2) + (n-1)m2\pi d_2 = m\pi[d_1 + d_2 + n2d_2 - 2d_2] =$$
$$a_n = m\pi[d_1 + (2n-1)d_2]$$

Celková délka lana je rovna součtu délek lana v jednotlivých vrstvách $\Rightarrow$ sečteme prvních *n* členů řady, kterou jsme právě zkoumali:

$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}\left[m\pi(d_1 + d_2) + m\pi\left[d_1 + (2n-1)d_2\right]\right] = \frac{nm\pi}{2}\left[d_1 + d_2 + d_1 + (2n-1)d_2\right]$

$s_n = \frac{nm\pi}{2}[2d_1 + 2nd_2] = nm\pi(d_1 + nd_2)$

Konkrétně: $s_n = nm\pi(d_1 + nd_2) = 6 \cdot 30 \cdot \pi(1,2 + 6 \cdot 0,04)\,\mathrm{m} = 814\,\mathrm{m}$.

Celková délka lana v *n* vrstvách je $nm\pi(d_1 + nd_2)$.

Př. 8: Rozhodni, pro která čísla *k* platí, že součet *k* po sobě jdoucích čísel je dělitelný číslem *k*.

Součet libovolných *k* po sobě jdoucích čísel:

- první číslo: *n*,
- poslední číslo: $n + k - 1$.

Součet: $n + (n+1) + (n+2) + \ldots + n + k - 1 = \underbrace{n + n + n + \ldots + n}_{k \text{ krát}} + 0 + 1 + 2 + \ldots + k - 1$

Součet aritmetické posloupnosti:
$n = k$ (počet členů), $a_1 = 0$, $a_n = k - 1$

Dosadíme: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{k}{2} + (0 + k - 1) = \frac{k(k-1)}{2}$.

Celkově: $n + (n+1) + (n+2) + \ldots + n + k - 1 = nk + \frac{k(k-1)}{2} = k\left(n + \frac{k-1}{2}\right)$.

Pokud má být součet dělitelný číslem *k*, musí být uvnitř závorky přirozené číslo $\Rightarrow$ zlomek $\frac{k-1}{2}$ musí být celé číslo $\Rightarrow$ čitatel $k-1$ musí být sudý $\Rightarrow$ $k - 1 = 2l$ $\Rightarrow$ $k = 2l + 1$ (*k* je liché číslo).

Součet *k* po sobě jdoucích čísel je určitě dělitelný číslem *k*, pokud je číslo *k* liché.

Shrnutí: Některé slovní úlohy je možné matematizovat pomocí posloupností. Stačí přiřadit čísla ze zadání jejím ekvivalentům v posloupnostech.