

8.2.5 Zápisy se sumačním znakem

Předpoklady: 8202

Pedagogická poznámka: Tato hodina je spíše na 25 minut, není nutné ji probírat, ale její obsah může studentům ulehčit život. Je možné ji zařadit kamkoliv po hodině 8202.

Chceme sečíst čísla od 1 do 52. Jak to můžeme napsat?

Zatím umíme toto: $1+2+3+\dots+50+51+52$.

Dvě nevýhody:

- je to dlouhé,
- není přesně dáno, co máme napsat místo teček, předpokládáme, že tři tečky znamenají „stejným způsobem dále“.

⇒ Bylo by užitečné zavést speciální zápis pro sčítání velkého množství čísel. ⇒

sumační znak: $1+2+3+\dots+50+51+52 = \sum_{i=1}^{52} i$

- i - co sčítáme,
- $i=1$ - odkud sčítáme,
- 52 - kam až sčítáme.

Př. 1: Rozepiš následující sumy: a) $\sum_{i=3}^7 i$,

b) $\sum_{a=-3}^4 a$.

a) $\sum_{i=3}^7 i = 3+4+5+6+7$

b) $\sum_{a=-3}^4 a = -3+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4$

Př. 2: Napiš následující součty pomocí sumačního znaménka.

a) $7+8+\dots+14+15$,

b) $-112+(-111)+\dots+23+24$.

a) $7+8+\dots+14+15 = \sum_{i=7}^{15} i$

b) $-112+(-111)+\dots+23+24 = \sum_{i=-112}^{24} i$

Zapsat samozřejmě můžeme i jiné součty než celá čísla jdoucí po sobě.

$$\sum_{i=1}^5 i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$$

Př. 3: Rozepiš následující sumy.

a) $\sum_{i=1}^{25} 2i$

b) $\sum_{i=1}^{25} \frac{1}{i+1}$

c) $\sum_{i=3}^{100} (i^2 + 2i - 3)$

a) $\sum_{i=1}^{25} 2i = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 2 \cdot 24 + 2 \cdot 25 = 2 + 4 + 6 + \dots + 48 + 50$

b) $\sum_{i=1}^{25} \frac{1}{i+1} = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+1} + \dots + \frac{1}{24+1} + \frac{1}{25+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{25} + \frac{1}{26}$

c) $\sum_{i=3}^{100} (i^2 + 2i - 3) = (3^2 + 2 \cdot 3 - 3) + (4^2 + 2 \cdot 4 - 3) + \dots + (100^2 + 2 \cdot 100 - 3)$

Př. 4: Napiš následující součty pomocí sumačního znaménka.

a) $7 + 9 + \dots + 51 + 53$

b) $1 + 4 + \dots + 81 + 100$

c) $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{50}{51} + \frac{51}{52}$

a) $7 + 9 + \dots + 51 + 53 = \sum_{i=3}^{26} (2i+1) = \sum_{i=4}^{27} (2i-1)$

b) $1 + 4 + \dots + 81 + 100 = \sum_{i=1}^{10} i^2$

c) $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{50}{51} + \frac{51}{52} = \sum_{i=3}^{51} \frac{i}{i+1} = \sum_{i=4}^{52} \frac{i-1}{i}$

Dodatek: Podobně je možné zkrátit zápisy součinů pomocí znaku $\prod_{i=1}^{10} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9 \cdot 10$.

Př. 5: Petáková:

strana 70/cvičení 55 b)

strana 71/cvičení 56 a)

strana 71/cvičení 57 a)

strana 71/cvičení 58 a) d)

Shrnutí: Zápisy součtů můžeme zkrátit pomocí speciální znaku \sum .