

8.2.7 Geometrická posloupnost

Předpoklady: 8101, 8102, 8103, 8107

Pedagogická poznámka: V hodině rozdělím třídu na dvě skupiny a každá z nich dělá jeden z prvních dvou příkladů. Většina studentů obou skupin potřebuje pomoc u tabule. Oba příklady napíšu na tabuli a nechám je tam do okamžiku, kdy sestavíme vzorec pro n -tý člen.

Př. 1: Poločas rozpadu (doba, za kterou se rozpadne přibližně polovina existujícího množství látky) francie ${}^{221}_{87}\text{Fr}$ je přibližně 5 minut. Jaké množství této látky zbude z počátečních 10 gramů po půl hodině?

Budeme sledovat množství francie vždy po pěti minutách:

počáteční množství ... $a_1 = 10$

po 5 minutách ... $a_2 = 10 \cdot \frac{1}{2}$

po 10 minutách ... $a_3 = \left(10 \cdot \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^2$

po 15 minutách ... $a_4 = \left[10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \frac{1}{2} = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^3$

po 20 minutách ... $a_5 = \left[10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] \frac{1}{2} = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^4$

po 25 minutách ... $a_6 = \left[10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4\right] \frac{1}{2} = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^5$

po 30 minutách ... $a_7 = \left[10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5\right] \frac{1}{2} = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{10}{2^6} = \frac{10}{64} = \frac{5}{32} \doteq 0,16 \text{ g}$

Po 30 minutách zbude z původních 10 gramů pouze 0,16 gramu francie ${}^{221}_{87}\text{Fr}$.

Př. 2: HDP (hrubý domácí produkt) České republiky dosáhl v roce 2008 hodnoty 353 701 Kč na jednoho obyvatele. Jaké hodnoty by dosáhl v roce 2018, pokud by rostl stálým tempem 3% ročně?

Postupujeme podobně jako v předchozím příkladě, postupně určujeme hodnotu HDP po jednotlivých letech:

počáteční hodnota ... $n_1 = 353701$

po 1. roce (rok 2009) ... $n_2 = 353701 \cdot 1,03$

po 2. letech (rok 2010) ... $n_3 = (353701 \cdot 1,03) \cdot 1,03 = 353701 \cdot 1,03^2$

po 3. letech (rok 2011) ... $n_4 = (353701 \cdot 1,03^2) \cdot 1,03 = 353701 \cdot 1,03^3$

po 4. letech (rok 2012) ... $n_5 = (353701 \cdot 1,03^3) \cdot 1,03 = 353701 \cdot 1,03^4$

...

po 10. letech (rok 2018) ... $n_{11} = (353701 \cdot 1,03^9) \cdot 1,03 = 353701 \cdot 1,03^{10} = 475345$

Po deseti letech bude při 3% růstu hodnota HDP na obyvatele 475345 Kč.

Př. 3: Najdi společnou speciální vlastnost obou předchozích posloupností.

U obou předchozích posloupností platí, že každý člen získáme vynásobením předchozího členu stále stejným číslem.

Posloupnost s uvedenou vlastností se nazývá **geometrická**.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá geometrická, právě když existuje takové reálné číslo q , že pro každé přirozené číslo n platí $a_{n+1} = a_n \cdot q$. Číslo q se nazývá **kvocient posloupnosti**.

Jestliže v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí $a_1 \neq 0$ a zároveň $q \neq 0$, pak jsou všechny členy posloupnosti různé od nuly a můžeme psát $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, tedy podíl dvou po sobě následujících členů geometrické posloupnosti je konstantní a rovný jejímu kvocientu.

Př. 4: Urči kvocienty geometrických posloupností z příkladů 1 a 2.

a) V příkladu 1 platí: $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$.

b) V příkladu 2 platí: $a_{n+1} = a_n \cdot 1,03 \Rightarrow q = 1,03$.

Př. 5: Rozhodni, zda daná tři čísla tvoří tři po sobě jdoucí členy nějaké geometrické posloupnosti. Pokud ano, urči kvocient.

a) $\frac{9}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{9}$

b) $\sqrt{5} - \sqrt{3}; \sqrt{2}; \sqrt{5} + \sqrt{3}$

Pokud zadaná trojice čísel tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti, musí být jejich podíl stejné číslo.

a) $\frac{9}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{9}$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{4}} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{9}$$

Jde o tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti s kvocientem $\frac{2}{9}$.

b) $\sqrt{5} - \sqrt{3}; \sqrt{2}; \sqrt{5} + \sqrt{3}$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5} + \sqrt{3})$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5} + \sqrt{3})$$

Jde o tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti s kvocientem $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5} + \sqrt{3})$.

Pedagogická poznámka: S předchozím příkladem mají studenti opět nečekané problémy, hlavně u bodu b) se pak objevují problémy s upravením výrazu.

Př. 6: Napiš prvních pět členů geometrických posloupností:

a) $a_1 = 1, q = -2,$

b) $a_1 = \pi, q = 0,$

c) $a_1 = 5, q = -1,$

d) $a_1 = 0, q = 0.$

Které z těchto posloupností jsou aritmetické?

a) $a_1 = 1, q = -2$

Členy posloupnosti: $1; -2; 4; -8; 16; \dots \Rightarrow$ není aritmetická.

b) $a_1 = \pi, q = 0$

Členy posloupnosti: $\pi; 0; 0; 0; 0; \dots \Rightarrow$ není aritmetická.

c) $a_1 = 5, q = -1$

Členy posloupnosti: $5; -5; 5; -5; 5; \dots \Rightarrow$ není aritmetická.

d) $a_1 = 0, q = 0$

Členy posloupnosti: $0; 0; 0; 0; 0; \dots \Rightarrow$ je aritmetická s diferencí $d = 0$.

Př. 7: Dokaž, že posloupnost $(5 \cdot 2^{n+1})_{n=1}^{\infty}$ je geometrická.

Hledáme v definici geometrické posloupnosti podmínku, která odlišuje geometrickou posloupnost od ostatních posloupností \Rightarrow musíme dokázat, že platí: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

$$a_n = 5 \cdot 2^{n+1}$$

$$a_{n+1} = 5 \cdot 2^{(n+1)+1} = 5 \cdot 2^{n+2}$$

$$\text{Dosadíme: } 5 \cdot 2^{n+2} = 5 \cdot 2^{n+1} \cdot q \quad / : 5$$

$$2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1} \cdot q \quad / : 2^{n+1}$$

$$2 = q$$

Vztah $a_{n+1} = a_n \cdot q$ platí pro všechny členy posloupnosti \Rightarrow posloupnost $(5 \cdot 2^{n+1})_{n=1}^{\infty}$ je geometrická (s kvocientem 2).

Geometrická posloupnost je stejně pravidelná jako aritmetická \Rightarrow měl by existovat vzorec pro n -tý člen.

Př. 8: Najdi vzorec pro n -tý člen posloupnosti z příkladů 1 a 2. Vyslov hypotézu o vzorci geometrické posloupnosti: $a_1; a_{n+1} = a_n \cdot q; n \in N$.

a) Členy posloupnosti máme již upravené tak, aby byl každý vyjádřen pomocí a_1 a d :

počáteční množství	...	$a_1 = 10$
po 5 minutách	...	$a_2 = 10 \cdot \frac{1}{2}$
po 10 minutách	...	$a_3 = \left(10 \cdot \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^2$
po 15 minutách	...	$a_4 = \left[10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \frac{1}{2} = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^3$
po 20 minutách	...	$a_5 = \left[10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] \frac{1}{2} = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^4$
po 25 minutách	...	$a_6 = \left[10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4\right] \frac{1}{2} = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^5$
po 30 minutách	...	$a_7 = \left[10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5\right] \frac{1}{2} = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^6$

....

$$a_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{2} = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Zdá se, že posloupnost by mohla být dána vzorcem $\left[10 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]_{n=1}^{\infty}$.

b) Členy posloupnosti máme již upravené tak, aby byl každý vyjádřen pomocí a_1 a d :

počáteční hodnota	...	$n_1 = 353701$
po 1. roce	...	$n_2 = 353701 \cdot 1,03$
po 2. letech	...	$n_3 = (353701 \cdot 1,03) \cdot 1,03 = 353701 \cdot 1,03^2$
po 3. letech	...	$n_4 = (353701 \cdot 1,03^2) \cdot 1,03 = 353701 \cdot 1,03^3$
po 4. letech	...	$n_5 = (353701 \cdot 1,03^3) \cdot 1,03 = 353701 \cdot 1,03^4$
...		
po 10. letech	...	$n_6 = (353701 \cdot 1,03^4) \cdot 1,03 = 353701 \cdot 1,03^5 = 475345$

Zdá se, že posloupnost by mohla být dána vzorcem $\left[353701 \cdot 1,03^{n-1}\right]_{n=1}^{\infty}$.

Oba odvozené vzorce mají stejný tvar: $a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow$ zřejmě platí: geometrická posloupnost je dána vzorcem $\left[a_1 \cdot q^{n-1}\right]_{n=1}^{\infty}$.

O správnosti naší hypotézy se musíme přesvědčit. Zkusíme důkaz matematickou indukcí:

Př. 9: Dokaž větu: V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

1. Ověříme platnost pro $n = 1$

$$a_1 = a_1 \cdot q^{1-1} = a_1 \cdot q^0 = a_1 \Rightarrow \text{pro } n = 1 \text{ vzorec platí}$$

2. Předpokládáme, že vzorec platí pro k a dokazujeme, že platí i pro $k + 1$

Víme: $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$.

Chceme dokázat: $a_{k+1} = a_1 \cdot q^{(k+1)-1} = a_1 \cdot q^k$.

Určitě platí rekurentní vztah pro geometrickou posloupnost: $a_{k+1} = a_k \cdot q$.

Dosadíme do rekurentního vyjádření za $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$:

$$a_{k+1} = a_k \cdot q = a_1 \cdot q^{k-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{k-1+1} = a_1 \cdot q^k - \text{to jsme chtěli.}$$

Podářilo se nám vztah dokázat.

Pedagogická poznámka: Pokud nestíháme, předchozí příklad vynecháváme a důkaz buď rychle udělám na tabuli, nebo ho úplně přeskočíme.

Teď už můžeme napsat s jistotou:

V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q platí pro každé $n \in \mathbb{N}$
 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Vzorec je hodně podobný vzorci pro aritmetickou posloupnost, opět v něm vystupuje člen $(n-1)$, protože člen a_1 jsme kvocientem ještě nenásobili.

Vzorec geometrické posloupnosti připomíná předpis exponenciální funkce \Rightarrow geometrická posloupnost je speciálním případem exponenciální funkce.

Př. 10: U následujících geometrických posloupností sestav vzorec pro n -tý člen, najdi rekurentní vyjádření a urči a_6 .

a) $a_1 = 2, q = 2$

b) $a_3 = 1; q = \frac{1}{3}$

c) $\left[3(-1)^{n-1} \right]_{n=1}^{\infty}$

d) $a_1 = \sqrt{3}; a_{n+1} = a_n \cdot \sqrt{3}; n \in \mathbb{N}$

e) $\left[3^n \right]_{n=1}^{\infty}$

a) $a_1 = 2, q = 2$

Rekurentní vyjádření: $a_1 = 2; a_{n+1} = a_n \cdot 2, n \in \mathbb{N}$.

Vzorec pro n -tý člen: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

$$a_6 = 2^6 = 64$$

b) $a_3 = 1; q = \frac{1}{3}$

Nejdříve si určíme a_1 : $a_3 = a_2 \cdot q \Rightarrow a_2 = \frac{a_3}{q} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9$.

Rekurentní vyjádření: $a_1 = 9; a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{3}, n \in N$.

Vzorec pro n -tý člen: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$.

$$a_6 = \left(\frac{1}{3}\right)^{6-3} = \frac{1}{27}$$

c) $\left[3(-1)^{n-1}\right]_{n=1}^{\infty}$

Posloupnost je zadána vzorcem pro n -tý člen $\Rightarrow a_1 = 3, q = -1$.

Rekurentní vyjádření: $a_1 = 3; a_{n+1} = a_n \cdot (-1), n \in N$.

Vzorec pro n -tý člen už máme.

$$a_6 = 3 \cdot (-1)^5 = -3$$

d) $a_1 = \sqrt{3}; a_{n+1} = a_n \cdot \sqrt{3}; n \in N$

Rekurentní vyjádření už máme.

$$a_1 = \sqrt{3}, q = \sqrt{3}$$

Vzorec pro n -tý člen: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}^{n-1} = \sqrt{3}^n$.

$$a_6 = \sqrt{3}^6 = 27$$

e) $\left[3^n\right]_{n=1}^{\infty}$

Pozor, to není klasický vzorec pro n -tý člen geometrické posloupnosti \Rightarrow musíme vztah upravit do tvaru vzorce pro n -tý člen.

$$3^n = 3 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow a_1 = 3, q = 3$$

Rekurentní vyjádření: $a_1 = 3; a_{n+1} = a_n \cdot 3; n \in N$.

Vzorec pro n -tý člen: $\left(3 \cdot 3^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$.

$$a_6 = 3^6$$

Př. 11: Petáková:

strana 67/cvičení 9 b) c)

strana 67/cvičení 10 b)

strana 67/cvičení 12 a) c) d)

Shrnutí: Posloupnost, v níž každý člen získáme z členu předchozího vynásobením stejným číslem, se nazývá geometrická. Při výpočtu jejího n -tého členu násobíme první člen $(n-1)$ mocninou kvocientu.