

8.2.8 Vzorce pro geometrickou posloupnost

Předpoklady: 8203, 8207

Př. 1: Pro geometrickou posloupnost platí $a_5 = \frac{1}{2}$; $q = 2$. Urči člen a_9 , aniž bys určoval a_1 .

Mohli bychom pomocí vzorce pro n -tý člen určit člen a_1 a pak pomocí stejného vzorce určit i a_9 . Tento postup je složitější a zakazuje ho zadání příkladu.

Zkusíme to jinak:

Abychom se od členu a_5 dostali ke členu a_9 , musíme čtyřikrát ($9 - 5 = 4$) násobit kvocientem

$$\Rightarrow a_9 = a_5 \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = a_5 \cdot q^4 = \frac{1}{2} \cdot 2^4 = 2^3 = 8.$$

Člen a_9 se rovná 8.

Př. 2: V geometrické posloupnosti s kvocientem q vypočítej hodnotu členu a_s , pokud znáš hodnotu a_r .

Stejný příklad jako předchozí, pouze počítáme obecně.

Člen a_r násobíme kvocientem q a to $(s - r)$ krát $\Rightarrow a_s = a_r \cdot q^{s-r}$.

Vzorec funguje i pro výpočet předchozího členu. Dosadíme hodnoty z příkladu 1:

$$d = 2, a_9 = 8, \text{ počítáme člen } a_5 = a_9 \cdot q^{5-9} = 8 \cdot 2^{-4} = \frac{1}{2}.$$

V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q platí pro všechna $r, s \in \mathbb{N}$
 $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$.

Vzorec je možné snadno interpretovat slovně: určitý člen v posloupnosti vypočteme z libovolného předchozího (následujícího) tak, že ho vynásobíme (vydělíme) kvocientem tolikrát, o kolik je jeho index větší (menší).

Dodatek: Vzorec $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$ je také velmi podobný vzorci $a_s = a_r + (s - r)d$ pro aritmetickou posloupnost.

Př. 3: (BONUS) Dokaž pomocí vzorce pro n -tý člen geometrické posloupnosti platnost vzorce $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$.

Pro členy posloupnosti ve vzorci platí: $a_r = a_1 \cdot q^{r-1}$, $a_s = a_1 \cdot q^{s-1}$.

Rovnice vydělíme: $\frac{a_s}{a_r} = \frac{a_1 \cdot q^{s-1}}{a_1 \cdot q^{r-1}}$

$$\frac{a_s}{a_r} = q^{s-1-(r-1)}$$

$$a_s = a_r \cdot q^{s-r}$$

Předchozí postup je pochopitelný, ale také lehce napadnutelný. Při jeho použití dělíme a museli bychom tedy zajistit, aby všechna čísla v první rovnici byla nenulová. Většinou se proto používá jiný postup: $a_s = a_1 \cdot q^{s-1}$.

Určitě platí: $s-1 = s-r+r-1$.

$$a_s = a_1 \cdot q^{s-r+r-1} = a_1 \cdot q^{s-r} \cdot q^{r-1} = (a_1 \cdot q^{r-1}) \cdot q^{s-r} = a_r \cdot q^{s-r}$$

Dodatek: Podobně jako u aritmetické posloupnosti i teď platí, že nám už známý vzorec pro n -tý člen geometrické posloupnosti není nic jiného než speciální případ vzorce

$$a_s = a_r \cdot q^{s-r}, \text{ kdy dosadíme } s = n \text{ a } r = 1.$$

Př. 4: V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dány členy $a_5 = \frac{5}{2}$, $a_{10} = 80$. Urči q , a_1 a a_8 .

Dosadíme do vztahu mezi a_r a a_s : $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$.

$$a_{10} = a_5 \cdot q^{10-5}$$

$$80 = \frac{5}{2} \cdot q^5 \quad / : 5$$

$$16 = \frac{q^5}{2}$$

$$q^5 = 32 \Rightarrow q = 2$$

Teď určíme a_1 : $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^{5-1}$

$$\frac{5}{2} = a_1 \cdot 2^4$$

$$a_1 = \frac{5}{2^5} = \frac{5}{32}$$

Teď už snadno dopočítáme libovolný člen posloupnosti, známe vzorec pro n -tý člen:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_8 = \frac{5}{32} \cdot 2^{8-1} = \frac{5 \cdot 2^7}{2^5} = 5 \cdot 4 = 20.$$

Pro zadanou posloupnost platí: $q = 2$, $a_1 = \frac{5}{32}$, $a_8 = 20$.

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu někteří zoufalci už zase mají problémy rozlišit a_n a n .

Dodatek: Vzorec nevyžaduje, abychom do něj dosazovali za s větší číslo než za r . Například předchozí příklad můžeme počítat i takto: $a_s = a_r + (s-r)d$

$$a_5 = a_{10} \cdot q^{5-10}$$

$$\frac{5}{2} = 80 \cdot q^{-5}$$

$$q^5 = 32 \Rightarrow q = 2.$$

Př. 5: V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dány členy $a_4 = 1$, $a_9 = 9\sqrt{3}$. Urči q , a_1 a a_6 .

Dosadíme do vztahu mezi a_r a a_s : $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$

$$a_9 = a_4 \cdot q^{9-4}$$

$$9\sqrt{3} = 1 \cdot q^5$$

$$3^2 \sqrt{3} = q^5$$

$$q = \sqrt[5]{3^2 \sqrt{3}} = \sqrt[5]{3^2 3^{\frac{1}{2}}} = \left(3^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Teď určíme a_1 : $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^{4-1}$

$$1 = a_1 \cdot (\sqrt{3})^3$$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{3^3}}$$

Teď už snadno dopočítáme libovolný člen posloupnosti, známe vzorec pro n -tý člen:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_6 = \frac{1}{\sqrt{3^3}} \cdot \sqrt{3}^{6-1} = \frac{\sqrt{3^5}}{\sqrt{3^3}} = \sqrt{3^2} = 3.$$

Pro zadanou posloupnost platí: $q = \sqrt{3}$, $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3^3}}$, $a_6 = 3$.

Podobně jako u aritmetické i u geometrické posloupnosti dokážeme vzorcem sečíst prvních n členů.

Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tedy pro

$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ platí:

a) je-li $q = 1$ $s_n = n \cdot a_1$,

b) je-li $q \neq 1$ $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Uvedené vzorce nejsou na rozdíl od ostatních moc podobné vzorci pro aritmetickou posloupnost. Ani se k nim neváže žádná historka. Jejich důkaz však není obtížný.

Dokážeme:

a) Je-li $q = 1$ $s_n = n \cdot a_1$.

Je-li $q = 1$, pak pro všechny členy posloupnosti platí: $a_n = a_{n-1} = \dots = a_2 = a_1 \Rightarrow$ sčítáme

n -krát stejnou hodnotu $a_1 \Rightarrow s_n = \underbrace{a_1 + a_1 + \dots + a_1}_{n\text{-krát}} = na_1$.

b) Je-li $q \neq 1$ $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Napišeme si součet řady: $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$.

Všechny členy v řadě vyjádříme vzorcem pro n -tý člen: $s_n = a_1 + a_1q + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$.

Předchozí rovnost si vynásobíme kvocientem q : $q \cdot s_n = a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$.

Ted' od sebe předchozí dvě rovnice odečteme:

$$\begin{array}{r} q \cdot s_n = a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \\ s_n = a_1 + a_1q + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \\ \hline \end{array}$$

$$q \cdot s_n - s_n = -a_1 + \underbrace{a_1q - a_1q}_0 + \underbrace{a_1q^2 - a_1q^2}_0 + \dots + \underbrace{a_1q^{n-1} - a_1q^{n-1}}_0 + a_1q^n$$

$$s_n(q - 1) = a_1q^n - a_1 \quad / : (q - 1)$$

$$s_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{(q - 1)} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Př. 6: BONUS: Dokaž vzorec pro součet geometrické posloupnosti pro $q \neq 1$ matematickou indukcí.

Dokazujeme větu: Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tedy pro

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \text{ platí: je-li } q \neq 1 \text{ } s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

1. Ověříme vztah pro $n = 1$

Sčítáme jediné číslo $a_1 = s_1$.

$$\text{Dosadíme do vzorce: } s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{q^1 - 1}{q - 1} = a_1 \cdot 1 = a_1.$$

2. Předpokládáme platnost vztahu pro $n = k$ a dokazujeme platnost pro $n = k + 1$:

Víme, že platí: $s_k = \frac{k}{2}(a_1 + a_k) = a_1 + a_2 + \dots + a_k$.

Chceme dokázat, že platí: $s_{k+1} = a_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$.

s_{k+1} je součet členů posloupnosti: $s_{k+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1}$.

Použijeme vzorec $s_k = a_1 \frac{q^k - 1}{q - 1} = a_1 + a_2 + \dots + a_k \Rightarrow s_{k+1} = s_k + a_{k+1}$.

Napišeme vztah: $s_{k+1} = s_k + a_{k+1} = a_1 \frac{q^k - 1}{q - 1} + a_{k+1}$, vzorec pro s_{k+1} , který potřebujeme,

neobsahuje $a_{k+1} \Rightarrow$ tento člen musíme vyjádřit pomocí a_1 a $q \Rightarrow a_{k+1} = a_1q^{k-1+1} = a_1q^k$.

$$s_{k+1} = a_1 \frac{q^k - 1}{q - 1} + a_1q^k = a_1 \left(\frac{q^k - 1}{q - 1} + q^k \right) = a_1 \left(\frac{q^k - 1}{q - 1} + \frac{q^k(q - 1)}{q - 1} \right) =$$

$$s_{k+1} = a_1 \left(\frac{q^k - 1 + q^{k+1} - q^k}{q - 1} \right) = a_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} \quad \text{Hotovo.}$$

Př. 7: Urči součet:

- a) prvních osmi členů geometrické řady $a_1 = 2$ $q = \sqrt{3}$,
- b) prvních osmi členů geometrické řady $a_1 = 2$ $q = -2$,
- c) všech nezáporných celočíselných mocnin dvou menších než 100.
Součet určený v bodu c) vzorce zkontroluj pomocí kalkulačky.

a) součet prvních osmi členů geometrické řady $a_1 = 2$ $q = \sqrt{3}$

Jenom dosadíme do vzorce: $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

$$s_8 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}^8 - 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 \cdot \frac{3^4 - 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 \cdot \frac{81 - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{160}{\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{160(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} = 80(\sqrt{3} + 1)$$

b) součet prvních osmi členů geometrické řady $a_1 = 2$ $q = -2$

Jenom dosadíme do vzorce: $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

$$s_8 = 2 \cdot \frac{(-2)^8 - 1}{(-2) - 1} = 2 \cdot \frac{256 - 1}{-3} = -2 \frac{255}{3} = -2 \cdot 85 = -170$$

c) všech mocnin dvou menších než 100

Největší mocnina dvou menší než 100 je $64 = 2^6$.

Určujeme tedy součet: $1 + 2 + 4 + \dots + 64$.

Jde o geometrickou posloupnost: $a_1 = 1$, $q = 2$, chceme s_7 (64 je sedmý člen).

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$s_7 = 1 \frac{2^7 - 1}{2 - 1} = \frac{128 - 1}{1} = 127$$

Součet všech mocnin dvou menších než 100 je 127.

Kalkulačka potvrdí náš výpočet.

Př. 8: Je možné, aby součet prvních n členů geometrické posloupnosti, jejíž žádný člen není roven nule, byl nulový? Pokud ano, za jakých podmínek?

Takovou posloupností může být například posloupnost: $-1; 1; -1; 1; -1; 1; \dots$

Její součet je: $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \Rightarrow$ pokud je v součtu sudý počet členů, je součet nulový.

Podmínku ze zadání splňuje každá geometrická posloupnost: $a_1; q = -1$, pokud sčítáme sudý počet členů (tedy pokud platí $n = 2k$).

Př. 9: Urči číslo x tak, aby čísla $a_1 = 1$, $a_2 = 2^x$, $a_3 = 7 \cdot 2^x - 10$ tvořila tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Urči tuto posloupnost.

Pro po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti musí platit: $a_{n+1} = a_n \cdot q$. Protože všechna zadaná čísla jsou různá od nuly, můžeme psát i $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$\text{Dosadíme: } q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow \frac{2^x}{1} = \frac{7 \cdot 2^x - 10}{2^x} \quad / \cdot 2^x.$$

Získali jsme exponenciální rovnici: $(2^x)^2 = 7 \cdot 2^x - 10$.

$$(2^x)^2 - 7 \cdot 2^x + 10 = 0, \text{ provedeme substituci } y = 2^x.$$

$$y^2 - 7y + 10 = 0$$

$$(y - 2)(y - 5) = 0$$

$$y_1 = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1, \quad q = \frac{2^x}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

Jde o geometrickou posloupnost: $a_1 = 1$, $q = 2 \Rightarrow 1, 2, 4, 8, 16, \dots$

$$y_2 = 5 \Rightarrow 2^x = 5 \Rightarrow x = \log_2 5, \quad q = \frac{2^x}{1} = \frac{5}{1} = 5$$

Jde o geometrickou posloupnost: $a_1 = 1$, $q = 5 \Rightarrow 1, 5, 25, 125, 625, \dots$

Př. 10: Petáková:

strana 67/cvičení 14

strana 68/cvičení 16 a)

strana 68/cvičení 18

Shrnutí: Pro členy geometrické posloupnosti platí podobné vzorce jako pro členy aritmetické posloupnosti.