

8.2.10 Užítí geometrických posloupností

Předpoklady: 8207, 8208

Pedagogická poznámka: Tři příklady v této hodině nezaberou 45 minut, původně jsem předpokládal, že jejich řešení bude trvat maximálně 20 minut a zbytek hodiny bude možné věnovat následující hodině 8210. Bohužel došlo k jednomu z nejnečekanějších překvapení. Druhý příklad počítali studenti s ohromnými problémy, i ti nejlepší z nich se neustále snažili místo výpočtu a_n určit s_n jako v příkladě 1.

Původně jsem zařazoval příklad 2 jako druhý kvůli použití logaritmu při výpočtu času nutného k jejich namnožení. Zkušenost, kterou jsem udělal se studenty, je podle mě dalším argumentem pro zachování tohoto pořadí.

Př. 1: O vynálezci šachů se traduje zajímavá legenda. Když se s jeho vynálezem seznámil tehdejší čínský císař, novou hru si velice zamiloval. Pozval proto vynálezce k sobě a nabídl mu jako odměnu cokoli, si bude přát. Vynálezce se chvíli zamyslel a pak požádal císaře o trochu rýže. Šachovnice má 64 polí. Za první políčko chtěl dostat jedno zrnko rýže, za druhé dvě zrnka rýže, za třetí čtyři zrnka, za čtvrté osm zrnka a tak dále. Za každé další políčko chtěl dvojnásobný počet zrníček než za políčko předchozí. Císař byl velmi udiven jeho skromností a nabízel mu cennější odměnu. Odhadni počet zrníček, které vynálezce po císaři žádal. Kolik by to bylo kg? Urči počet zrníček výpočtem. Urči jejich hmotnost v kg, pokud 1 kg rýže tvoří přibližně 30 000 zrnka.

Počty zrnka na jednotlivých políčkách tvoří geometrickou posloupnost: 1, 2, 4, 8, 16, ...

$a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 64$ (64 políček šachovnice)

Určíme součet: $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} \doteq 1,8 \cdot 10^{19}$

Hmotnost zrnka v kg: $\frac{1,8 \cdot 10^{19}}{30000} = 6,1 \cdot 10^{14}$ kg

Pro srovnání celosvětová roční produkce rýže je $5 \cdot 10^{11}$ kg .

Pedagogická poznámka: Studentské odhady jsou v naprosté většině případů menší než 1 kg.

Př. 2: Baktérie Escherichia coli se v příznivých podmínkách dělí přibližně jednou za hodinu. Kolik bakterií se namnoží v roztoku za příznivých podmínek za 1 den. Jak dlouho by trvalo než by hmotnost bakterií překročila hmotnost Země? Úhyn neuvažuj. Hmotnost jedné bakterie je přibližně $6 \cdot 10^{-15}$ kg . Hmotnost Země $6 \cdot 10^{24}$ kg .

Počty bakterií tvoří geometrickou posloupnost: 1, 2, 4, 8, 16, ..

$a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 25$ (první člen je po 0 hodinách jediná bakterie na začátku pokusu)

použijeme vzorec pro n -tý člen: $a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_{25} = 1 \cdot 2^{24} = 16776216$

Za jak dlouho by bakterie vážily stejně jako Země:

Potřebný počet bakterií: $\frac{6 \cdot 10^{24}}{6 \cdot 10^{-15}} = 10^{39} \Rightarrow$ toto musí být hodnota hledané n -tého členu

posloupnosti

$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow 10^{39} = 2^{n-1}$ - musíme logaritmovat

$$\log 10^{39} = \log 2^{n-1}$$

$$39 \cdot \log 10 = (n-1) \log 2$$

$$n-1 = \frac{39}{\log 2}$$

$$n = \frac{39}{\log 2} + 1 = 130,6 \Rightarrow 131 \text{ člen posloupnosti} \Rightarrow \text{po 130 hodinách}$$

Po 130 hodinách (5,5 dne) by bakterie vážily více než Země.

Pedagogická poznámka: Oba předchozí příklady jsou pouze teoretické, protože není možné je prakticky realizovat, právě kvůli rychlosti, kterou se hodnoty posloupnosti zvětšují (geometrická posloupnost je speciální případ exponenciální funkce, která je nejrychleji rostoucím typem funkce). Exponenciální děje s kladnou zpětnou vazbou (čím větší hodnota, tím rychlejší růst) se v přírodě vyskytují vzácně právě proto, že velmi rychle spotřebují všechny zdroje.

Př. 3: Počet HIV pozitivních občanů ČR republiky dosahoval na počátku roku 2007 přibližně 1000 osob (jedná se o osoby pozitivně testované s prokázaným virem, ne o odhady, které jsou přibližně 10x vyšší). Při tetování bylo v průběhu roku 2007 objeveno 122 nově nakažených. Kolik procent HIV pozitivních přibylo v roce 2007? Urči počet HIV pozitivních na počátku roku 2015, pokud by šíření nemoci postupovalo stejným tempem. Kolik nakažených by za tohoto předpokladu bylo v roce za počátku roku 2050?

1000 ... 100%

122 ... x %

$$\frac{x}{122} = \frac{100}{1000} \Rightarrow x = \frac{100}{1000} \cdot 122 = 12,2 \%$$

V roce 2007 přibylo 12,2% HIV pozitivních.

Počet nemocných v roce:

začátek 2008 ... $1000 \cdot 1,122$

začátek 2009 ... $(1000 \cdot 1,122) \cdot 1,122$

po x letech ... $1000 \cdot 1,122^x$

do počátku roku 2015 uplyne od počátku roku 2007 8 let

počet nakažených na počátku roku 2015 ... $1000 \cdot 1,122^8 = 2512$ osob

do počátku roku 2050 uplyne od počátku roku 2007 43 let

počet nakažených na počátku roku 2050 ... $1000 \cdot 1,122^{43} = 141154$ osob

Pokud se bude nemoc šířit stejným tempem zvýší se počet nakažených do počátku roku 2015 na 2512 osob do počátku roku 2050 na 141154 osob.

Shrnutí: Exponenciální růst popisovaný geometrickou posloupností s kvocientem větším než 1 je čím dál rychlejší a proto dlouhodobě neudržitelný.