8.3.1 Vklady, jednoduché a složené úrokování

Předpoklady: 080210

Pedagogická poznámka: Původní parametry v hodinách byly několikrát měněny tak, aby odpovídaly aktuální situaci. Při provádění posledních úprav jsem se rozhodl, že u základních příkladů sloužících k odvozování vzorců napříště (pokud nedojde k opravdu razantním změnám situace) příliš aktualizací nebude. Reakci na změny pak usnadní paralelně připravený xls soubor s tabulkami, které obsahují výsledky všech příkladů a umožňují snadné změny veškerých parametrů.

Finanční matematika se zabývá ukládáním a půjčováním peněz, pojišťováním, odhady rizik apod. Poměrně důležitá a výnosná disciplína.

Spoření
Při spoření vkladatel uloží do banky své peníze (fakticky své peníze bance půjčí). Banka s takto získanými penězi podniká a za vypůjčení vkladateli platí tím, že mu vrátí více peněz, než si půjčil (úrok).
Důležité termíny:

- **jistina** – vložená částka, není majetkem banky, stále zůstává majetkem vkladatele.
- **úrok** – částka, kterou banka platí vkladateli za to, že si u ní peníze uložil (za to, že je bance půjčil), většinou se udává v procentech vložené částky.
- **roční úroková míra** – částka v procentech udávající velikost úroku za uložení peněz na jeden rok. Při roční úrokové míře 3% zaplatí banka vkladateli za uložení 100 000 Kč po dobu jednoho roku 3000 Kč. Pokud si tento vkladatel své peníze po roce vybere, z banky dostane místo vložených 100 000 Kč 103 000 Kč.
- **úrokovací období** – doba, po které banka vypočte a připíše vkladateli úroky. Často se úrokuje po jednom roce, časté je i měsíční nebo dokonce denní (na běžných účtech) úrokování.
- **úrokovací doba** – doba, po kterou vkladatel bance peníze půjčuje.
- **výpovědní lhůta** – protože banka půjčené peníze investuje, potřebuje dopředu vědět, kdy bude muset peníze vrátit. Proto musí vkladatel ve většině případů dopředu oznámit, kdy bude peníze vybírat. Tato doba se nazývá výpovědní lhůta. Pokud potřebuje v nutném případě vkladatel peníze vybrat dříve, musí bance zaplatit pokutu. V případě vkladů s delší výpovědní lhůtou (například dva roky) je běžné, že vkladatel vypoví vklad ihned při jeho vložení.
- **daň z příjmu** – příjmy z úroků patří mezi příjmy, ze kterých se platí daň. V tomto okamžiku v jednotné výši 15%.

Pedagogická poznámka: V následujících příkladech (při odvozování vzorců) používám úrok 3 %, který je při poslední aktualizaci (podzim 2016) nerealisticky vysoký. Nakonec jsem ho tak nechal a reálnější hodnoty používáme u procvičovacích příkladů.

Př. 1: Pavel uložil 150 000 Kč u banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 2 %. Úrokovací období vkladu je 1 rok. Kolik Kč zaplatí banka Pavlovi na úrocích za jeden rok? Kolik Kč zbude po zdanění? Pavel bude mít peníze uložené v bance po dobu pěti let. Úroky banka nepřipisuje ke vkladu, ale posílá je Pavlovi na jeho běžný účet. Urči jeho majetek vždy na konci roku za předpokladu, že úroky zaslané bankou neutrácí.

Úrok, který zaplatí banka za 1 rok: $150\,000 \cdot 0,02 = 3\,000$ Kč
Úrok po zdanění: $150\,000 \cdot 0,02 \cdot 0,85 = 2\,550$ Kč
Nyní počítáme Pavlův majetek na konci jednotlivých roků:
po 1. roce: $150\,000 + 150\,000 \cdot 0,02 \cdot 0,85 = 152\,550$ Kč
po 2. roce: $150\,000 + 2 \cdot 150\,000 \cdot 0,02 \cdot 0,85 = 155\,100$ Kč (banka poslala úroky dvakrát)
po 3. roce: $150\,000 + 3 \cdot 150\,000 \cdot 0,02 \cdot 0,85 = 157\,650$ Kč (banka poslala úroky třikrát)
po 4. roce: $150\,000 + 4 \cdot 150\,000 \cdot 0,02 \cdot 0,85 = 160\,200$ Kč (banka poslala úroky čtyřikrát)
po 5. roce: $150\,000 + 5 \cdot 150\,000 \cdot 0,02 \cdot 0,85 = 162\,750$ Kč (banka poslala úroky pětkrát)

Předchozí příklad je nejednodušším příkladem **jednoduchého úrokování**. Při jednoduchém úrokování se úrok nepřidává k vložené částce a banka ho neúročí.

Pokud by Pavel úroky utrácel, jeho chování by bylo příkladem rentiérského chování = vložíme do banky určitou částku a žijeme z úroků.

Př. 2: Jakou částku by bylo nutné uložit v bance na úrok 2 %, aby roční úrok dosáhl 240000 Kč (tedy 20 000 Kč na měsíc)? Jakou částku bychom museli mít uloženou při ročním úroku 1,2 %?

Uložená částka … x
roční úrok … $x \cdot 0,02 \cdot 0,85 = 240\,000$

$$x = \frac{240\,000}{0,03 \cdot 0,85} = 14\,117\,647 \text{ Kč}$$

Při úroku 1,2 %: $x = \dfrac{240\,000}{0,012 \cdot 0,85} = 23\,529\,412$ Kč

Pokud chceme, aby nám banka vyplácela každý měsíc 20 000 Kč na úrocích musíme mít na 2 % úrok uloženo přibližně 14 miliónu Kč. Při úroku 1,2 % dokonce více než 23,5 miliónů Kč.

Pedagogická poznámka: Následující příklad většinou nepočítáme. Jenom nechám studenty, aby si ho prohlédli. Bavíme se o výpočtu úroku za 1 měsíc.

Př. 3: Pavel uložil 150 000 Kč u konkurenční banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 2 %. Úrokovací období vkladu je 1 měsíc. Kolik Kč zaplatí banka Pavlovi na úrocích za jeden měsíc? Kolik Kč zbude po zdanění? Pavel bude mít peníze uložené v bance po dobu pěti let. Úroky banka nepřipisuje ke vkladu, ale posílá je Pavlovi na jeho běžný účet. Urči jeho majetek po pěti letech spoření.

Úrok, který zaplatí banka za 1 měsíc: $150\,000 \cdot \dfrac{0,02}{12} = 250$ Kč (2 % je roční úroková míra, měsíc je jedna dvanáctina roku)

Úrok po zdanění: $150\,000 \cdot \dfrac{0,02}{12} \cdot 0,85 = 212,5$ Kč

Nyní počítáme Pavlův majetek na konci jednotlivých měsíců:

po 1. měsíci: $150\,000+150\,000\cdot\frac{0,02}{12}\cdot0,85=150\,212,5$ Kč

po 2. měsíci: $150\,000+2\cdot150\,000\cdot\frac{0,02}{12}\cdot0,85=150\,425$ Kč (banka poslala úroky dvakrát)

po 3. měsíci: $150\,000+3\cdot150\,000\cdot\frac{0,02}{12}\cdot0,85=150\,637,5$ Kč (banka poslala úroky třikrát)

po *n*. měsíci: $150\,000+n\cdot150\,000\cdot\frac{0,02}{12}\cdot0,85$ Kč (banka poslala úroky *n*-krát)

Spočteme si ušetřené částky po zajímavém období:

po 12. měsíci: $150\,000+12\cdot150\,000\cdot\frac{0,02}{12}\cdot0,85=152\,550$ Kč

po 60. měsíci: $150\,000+60\cdot150\,000\cdot\frac{0,02}{12}\cdot0,85=162\,750$ Kč

Jak je vidět, při jednoduchém úrokování nezáleží na délce úrokovacího období.

Jednoduché úrokování na účtech není příliš časté. Častěji se používá **složené úrokování**, kdy úroky banka připíše k jistině a v dalším období platí úroky i z nich.

Př. 4: Pavel uložil 150 000 Kč u banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 2 %. Úrokovací období vkladu je 1 rok. Kolik Kč zaplatí banka Pavlovi na úrocích za jeden rok? Kolik Kč zbude po zdanění? Pavel bude mít peníze uložené v bance po dobu pěti let. Úroky banka připisuje ke vkladu. Urči jeho majetek vždy na konci roku.

Úrok, který zaplatí banka za 1 rok: $150\,000\cdot0,02=3\,000$ Kč

Úrok po zdanění: $150\,000\cdot0,02\cdot0,85=2550$ Kč

Nyní počítáme Pavlův majetek na konci jednotlivých roků:

po 1. roce: $150\,000+150\,000\cdot0,02\cdot0,85=150\,000(1+0,02\cdot0,85)=152\,550$ Kč

po 2. roce:

všechny peníze, které byly na Pavlově účtu na konci roku (včetně připsaných úroků), jsou jistinou do dalšího roku $\Rightarrow$ budou se z nich počítat úroky

Úrok po zdanění, který zaplatí banka za 2. rok: $150\,000(1+0,02\cdot0,85)\cdot0,02\cdot0,85$ Kč

Peníze na účtu po 2. roce: $150\,000(1+0,02\cdot0,85)$ - jistina z předchozího roku +

$150\,000(1+0,02\cdot0,85)\cdot0,02\cdot0,85$ - úrok v druhém roce

$$150\,000(1+0,02\cdot0,85)+150\,000(1+0,02\cdot0,85)\cdot0,02\cdot0,85=$$

$$=150\,000(1+0,02\cdot0,85)\cdot(1+0,02\cdot0,85)=150\,000(1+0,02\cdot0,85)^2$$

po 3. roce:

všechny peníze, které byly na Pavlově účtu na konci druhého roku (včetně připsaných úroků), jsou jistinou do dalšího roku $\Rightarrow$ budou se z nich počítat úroky

Úrok po zdanění, který zaplatí banka za 3. rok: $150\,000(1+0,02\cdot0,85)^2\cdot0,02\cdot0,85$ Kč

Peníze na účtu po 3. roce: $150\,000(1+0,02\cdot0,85)^2$ - jistina z předchozího roku +

$150\,000(1+0{,}02\cdot 0{,}85)^2\cdot 0{,}02\cdot 0{,}85$ - úrok v druhém roce

$150\,000(1+0{,}02\cdot 0{,}85)^2+150\,000(1+0{,}02\cdot 0{,}85)^2\cdot 0{,}02\cdot 0{,}85=$

$=150\,000(1+0{,}02\cdot 0{,}85)^2\cdot(1+0{,}02\cdot 0{,}85)=150\,000(1+0{,}02\cdot 0{,}85)^3$

po n-tém roce: $150\,000(1+0{,}02\cdot 0{,}85)^n$ Kč

konkrétně po 5-tém roce: $150\,000(1+0{,}02\cdot 0{,}85)^5=163\,190{,}90$ Kč

O moc více jsme nevydělali.

Př. 5: Jakou částku by Pavel našetřil, kdyby peníze za podmínek z předchozího příkladu (150 000 Kč, roční úroková míra 2%, úrokovací období 1 rok) uložil na 20 let? Jakou částku by ušetřil za 20 let, kdyby úroková míra klesla na 1,1 % ? Zapiš vzorec pro výpočet naspořené částky (značení: vložená částka I_0, roční úroková míra p, doba spoření n).

Spoření dvacet let $\Rightarrow$ použijeme stejný vzorec, změníme $n=20$:

$I=150\,000(1+0{,}02\cdot 0{,}85)^{20}=210\,140{,}80$ Kč

úrok 1,1% $\Rightarrow$ použijeme stejný vzorec, změníme $p=1{,}1$

$$I=I_0\left(1+\frac{p}{100}\cdot 0{,}85\right)^n=150\,000\left(1+\frac{1{,}1}{100}\cdot 0{,}85\right)^{20}=180\,687{,}00 \text{ Kč}$$

Pokud by Pavel uložil své peníze na 20 let, naspořil by 82 733,80 Kč, pokud by úrok klesl na 1,1 %, ušetřil by za 20 let 60 229,01 Kč.

Vzorec (jen zaměníme písmena za čísla): $I=I_0\left(1+\frac{p}{100}\cdot 0{,}85\right)^n$.

Pokud uložíme do banky částku I_0 na n let s roční úrokovou mírou p procent a úrokovacím obdobím 1 rok, pak po n letech při 15% zdanění uspoříme

$I=I_0\left(1+\frac{p}{100}\cdot 0{,}85\right)^n$ Kč.

Jak se změní Pavlovo spoření z příkladu 4, pokud úrokovacím obdobím nebude rok, ale jeden měsíc?

Př. 6: Pavel uložil 150 000 Kč u banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 2 %. Úrokovací období vkladu je 1 měsíc. Kolik Kč zaplatí banka Pavlovi na úrocích za jeden rok? Kolik Kč zbude po zdanění? Pavel bude mít peníze uložené v bance po dobu pěti let. Úroky banka připisuje ke vkladu. Urči jeho majetek vždy na konci roku.

Stejný postup jako v předchozím příkladu, ale počítáme po měsících.

Úrok, který zaplatí banka za 1 měsíc: $150\,000\cdot\frac{0{,}02}{12}=250$ Kč.

Úrok po zdanění: $150\,000 \cdot \frac{0,02}{12} \cdot 0,85 = 212,5$ Kč.

Nyní počítáme Pavlův majetek na konci jednotlivých měsíců.

po 1. měsíci: $150\,000 + 150\,000 \cdot \frac{0,02}{12} \cdot 0,85 = 150\,000\left(1 + \frac{0,02}{12} \cdot 0,85\right) = 150\,212,5$ Kč.

po 2. měsíci:
Všechny peníze, které byly na Pavlově účtu na konci 1. měsíce (včetně připsaných úroků), jsou jistinou do dalšího měsíce $\Rightarrow$ budou se z nich počítat úroky.

Úrok po zdanění, který zaplatí banka za 2. měsíc: $150\,000\left(1 + \frac{0,02}{12} \cdot 0,85\right) \cdot \frac{0,02}{12} \cdot 0,85$ Kč.

Peníze na účtu po 2. měsíci: $150\,000\left(1 + \frac{0,02}{12} \cdot 0,85\right)$ - jistina z předchozího měsíce +

$150\,000\left(1 + \frac{0,02}{12} \cdot 0,85\right) \cdot \frac{0,02}{12} \cdot 0,85$ - úrok v druhém měsíci.

$$150\,000\left(1 + \frac{0,02}{12} \cdot 0,85\right) + 150\,000\left(1 + \frac{0,02}{12} \cdot 0,85\right) \cdot \frac{0,02}{12} \cdot 0,85 =$$

$$= 150\,000\left(1 + \frac{0,02}{12} \cdot 0,85\right) \cdot \left(1 + \frac{0,02}{12} \cdot 0,85\right) = 150\,000\left(1 + \frac{0,02}{12} \cdot 0,85\right)^2$$

po 3. měsíci:
Všechny peníze, které byly na Pavlově účtu na konci druhého měsíce (včetně připsaných úroků), jsou jistinou do dalšího měsíce $\Rightarrow$ budou se z nich počítat úroky.

Úrok po zdanění, který zaplatí banka za 2 měsíce: $150\,000\left(1 + \frac{0,02}{12} \cdot 0,85\right)^2 \cdot \frac{0,02}{12} \cdot 0,85$ Kč

Peníze na účtu po 3. měsíci: $150\,000\left(1 + \frac{0,02}{12} \cdot 0,85\right)^2$ - jistina z předchozího měsíce +

$150\,000\left(1 + \frac{0,02}{12} \cdot 0,85\right)^2 \cdot \frac{0,02}{12} \cdot 0,85$ - úrok v druhém měsíci

$$150\,000\left(1 + \frac{0,02}{12} \cdot 0,85\right)^2 + 150\,000\left(1 + \frac{0,02}{12} \cdot 0,85\right)^2 \cdot \frac{0,02}{12} \cdot 0,85 =$$

$$= 150\,000\left(1 + \frac{0,02}{12} \cdot 0,85\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{0,02}{12} \cdot 0,85\right) = 150\,000\left(1 + \frac{0,02}{12} \cdot 0,85\right)^3$$

po n-tém měsíci: $150\,000\left(1 + \frac{0,02}{12} \cdot 0,85\right)^n$ Kč

Konkrétně po 5-tém roce (tedy po 60 měsících): $150\,000\left(1 + \frac{0,02}{12} \cdot 0,85\right)^{60} = 163\,297,70$ Kč

Pro porovnání z příkladu 4 při ročním úrokovacím období:

$150\,000(1 + 0,02 \cdot 0,85)^5 = 163\,190,90$

Zisk ze spoření je větší pouze o 160,8 Kč (úroky, které banka také úročí, se na Pavlově účtu objevily dříve).

Vzorec pro výpočet naspořené částky při složeném úrokování můžeme používat i v případě, že úrokovací období není jednoroční. Roční procentní úrokovou míru však musíme nahradit procentní úrokovou mírou za dané úrokovací období a počet let počtem úrokovacích období.

Př. 7: Pavel uložil 150 000 Kč u banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 2%. Úrokovací období vkladu je 1 den (jak je běžné na běžném účtu). Jakou částku našetří Pavel za pět let? Přestupnost některého z roků zanedbej.

Použijeme vzorec $I = I_0\left(1+\frac{p}{100}\cdot 0,85\right)^n$.

$I_0 = 150\,000$

$p = \frac{2}{365}$ (2 % za rok, rozdělíme na 365 dní)

$n = 5\cdot 365 = 1825$

Výpočet $I = I_0\left(1+\frac{p}{100}\cdot 0,85\right)^n = 150\,000\left(1+\frac{2}{100\cdot 365}\cdot 0,85\right)^{1825} = 163\,307,20$ Kč

Částka se proti spoření s měsíčním úrokovacím období zvýšila, ale pouze o velmi málo (9,5 Kč).

Př. 8: Pavel uložil svému synovi při jeho narození 100 000 Kč u banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 1,2 % s půlročním úrokovacím obdobím. Jakou částku bude mít syn k dispozici ve věku 18 let?

Použijeme vzorec $I = I_0\left(1+\frac{p}{100}\cdot 0,85\right)^n$.

$I_0 = 100\,000$

$p = \frac{1,2}{2}$ (1,2% za rok, rozdělíme na 2 půlroky)

$n = 18\cdot 2 = 36$

Výpočet $I = I_0\left(1+\frac{p}{100}\cdot 0,85\right)^n = 100\,000\left(1+\frac{1,2}{100\cdot 2}\cdot 0,85\right)^{36} = 120\,097,46$ Kč

Pavel našetří synovi k 18 narozeninám 120 097,46 Kč.

Př. 9: Jaký úrok by musela banka poskytovat u vkladu z předchozího příkladu, aby se výsledná našetřená částka rovnala 300 000?

Použijeme předchozí rovnici, výsledná částka je 300000, neznáme procentní sazbu:

$$I = I_0\left(1+\frac{p}{100}\cdot 0,85\right)^n = 100\,000\left(1+\frac{p}{100\cdot 2}\cdot 0,85\right)^{36} = 300000$$

$$\left(1+\frac{p}{100\cdot 2}\cdot 0,85\right)^{36} = \frac{300\,000}{100\,000} = 3$$

$$1+\frac{p}{100\cdot 2}\cdot 0,85=\sqrt[36]{3}$$

$$\frac{p}{100\cdot 2}\cdot 0,85=\sqrt[36]{3}-1$$

$$p=\frac{200}{0,85}\left(\sqrt[36]{3}-1\right)=7,29$$

Aby Pavel za 18 let našetřil 300000, musel by uložit 100 000 na vklad s úrokem 7,29 %.

Př. 10: Petáková:
strana 71/cvičení 63

Shrnutí: Pokud uložíme do banky částku I_0 na n let s roční úrokovou mírou p procent a úrokovacím obdobím 1 rok, pak po n letech při 15% zdanění uspoříme $I=I_0\left(1+\frac{p}{100}\cdot 0,85\right)^n$ Kč. Pokud přepočteme úrokovou míru a zohledníme počet úrokovacích období, můžeme vzorec používat i na kratší úrokovací období než 1 rok.