8.3.2 Inflace, spoření

Předpoklady: 080301

Inflace

Papírové (a ještě více virtuální) peníze nemají (na rozdíl od minulosti, kdy hodnota mince odpovídala hodnotě kovu, ze kterého byla vyrobena) v dnešní době žádnou hodnotu samy o sobě, jejich používání reguluje stát, v případě zhroucení ekonomiky se může stát, že svou hodnotu zcela nebo částečně ztratí (měnové krize a měnové reformy).
Proces znehodnocování peněz probíhá téměř neustále (ale pomalu) díky jevu zvanému inflace (znehodnocování peněz).

V době psaní původní verze textu byla meziroční míra inflace 6 % (při aktualizaci v roce 2016 0,3 %, při poslední aktualizaci v roce 2019 3,1 %) $\Rightarrow$ peníze ztratily během uplynulých dvanácti měsíců 6% své hodnoty. Tedy za určitou částku bylo možné nakoupit o 6% zboží méně než před rokem.
Ceny různých druhů zboží se vyvíjejí různě $\Rightarrow$ výpočet míry inflace velmi závisí na tom, u kterého zboží sledujeme ceny a jak výrazně tyto ceny do výsledku započítáváme. Výpočet inflace se provádí v závislosti na „spotřebním koši", jehož obsah je vděčným námětem sporů uvnitř odborné veřejnosti (například je dlouhodobým sporem zda do inflace započítávat změny cen nemovitostí. V Evropě se to nedělá s odůvodněním, že nákup nemovitosti není spotřeba, ale investice. Fakt, že spotřebitelé musí někde bydlet, je trochu opomíjen. Hlavním důvodem tohoto přístupu je podle mnohých ekonomů fakt, že díky této zásadě vychází roční míra inflace v naprosté většině let nižší).
Roční míra inflace je průměrný údaj a faktický dopad zdražování je na různé vrstvy společnosti velmi různý (pokud zdražuje jídlo nebo energie, dotýká se to spíš chudších vrstev, pokud zdražují luxusní automobily, trpí především bohatí).

Na druhou stranu není možné nahlížet na inflaci jako zcela záporný jev. Fakt, že peníze pomalu ztrácí hodnotu, přispívá k tomu, aby nebyly zbytečně stahovány z oběhu a ukládány doma. Naopak inflace vlastníky motivuje, aby se peníze snažili investovat nebo utratit (a tím podporovali růst hospodářství). Naopak vzácné chvíle, kdy je inflace záporná (peníze hodnotu získávají a zboží zlevňuje - deflace) jsou považovány (některými ekonomy) za velmi nebezpečné (lidé nespoří a neutrácejí, protože čekají, až zboží ještě více zlevní. Tím však klesá výkon ekonomiky, protože je slabá poptávka).

V následujících výpočtech ode všech podrobností odhlédneme a budeme uvažovat, že inflace znamená stejnoměrné znehodnocování peněz bez ohledu na dopad pro konkrétní druhy zboží.
Pokud je roční míra inflace 3 %, znamená to, že se ceny za rok v průměru zvýší o 3 % $\Rightarrow$ zboží, které stálo na začátku roku 100 Kč, bude na konci roku stát 103 Kč. To znamená, že 100 Kč nebude mít na konci roku hodnotu 100 Kč, ale méně (přibližně 97,09 Kč, protože na zboží, za které bychom na konci roku utratili 100 Kč, by na jeho začátku stačilo přibližně 97,09 Kč).
Hodnotou původní částky sníženou inflací za nějaké období rozumíme částku, kterou bychom na začátku období museli utratit, abychom nakoupili stejné množství zboží, jako nakoupíme na konci období za původní částku. Konkrétně v předchozím případě hodnota původní částka 100 Kč, byla inflací 3 % ročně snížena na 97,9 Kč, protože za konci roku bychom za 100 Kč nakoupili stejné množství zboží jako na začátku roku za 97,09 Kč.

Př. 1: Urči, jakou hodnotu (v korunách z počátku roku) bude mít 50 000 Kč za rok, pokud se potvrdí roční odhad inflace ve výši 3%.

Zboží za 100 Kč má na konci roku cenu 103 Kč.
Na konci roku budeme mít 50 000 Kč, zajímá nás, kolik Kč by na začátku roku stačilo na nákup stejného množství zboží $\Rightarrow$ zboží, nakoupené na počátku roku za x Kč, má na konci roku cenu 50 000 Kč.
Přímá úměrnost:
počátek roku 100 Kč ... konec roku 103 Kč
počátek roku x Kč ... konec roku 50 000 Kč
$\frac{x}{100}=\frac{50\,000}{103} \Rightarrow x=\frac{50\,000\cdot 100}{103}=\frac{50\,000}{1,03}=48\,543,70 \text{ Kč}$
Ztratili jsme skoro 1500 Kč.

Jaký je význam hodnot ve výsledném vztahu $x=\frac{50\,000}{1,03}$?

- $50\,000$ ... počáteční hodnota peněz I_0,
- x ... konečná hodnota peněz I,
- 1,03 ... $1+0,03=1+\frac{3}{100}=1+\frac{p}{100}$ (jednička zvětšená o výši inflace ve zlomku).

$\Rightarrow$ hodnotu peněz sníženou o inflaci během jednoho roku můžeme rovnou počítat pomocí vzorce $I=\frac{I_0}{1+\frac{p}{100}}$.

Př. 2: Urči hodnotu 100 000 Kč po deseti letech, pokud se bude průměrná hodnota inflace v tomto období rovnat 3%.

Nejdříve určíme, kolik peněz bude nutné po dvaceti letech na nákup zboží v hodnotě 100 000 v současnosti. Poté přepočítáme hodnotu neúročených 100 000.
Kolik peněz potřebujeme na nákup zboží, které mělo na začátku cenu 100 000?
po 1 roce .... $10^5\cdot 1,03$
po 2 letech .... $\left(10^5\cdot 1,03\right)1,03=10^5\cdot 1,03^2$ (na počátku roku by bylo potřeba $10^5\cdot 1,03$ Kč)
po 3 letech .... $10^5\cdot 1,03^3$
po x letech .... $10^5\cdot 1,03^x$
teď můžeme dosadit 10 let a určit množství peněz v hodnotě 100 000
po 10 letech .... $10^5\cdot 1,03^{10}=134\,392 \text{ Kč}$
Po deseti letech potřebujeme 134 392 Kč na nákup zboží, které před tím stálo 100 000 Kč.
Hodnotu 100000 spočteme přímou úměrností:
134 392 Kč … 100 000 Kč
100 000 Kč … x Kč
$\frac{x}{100\,000}=\frac{100\,000}{134\,392} \Rightarrow x=100\,000\cdot\frac{100\,000}{134\,392}=74\,409,40 \text{ Kč}$

Při tříprocentní inflaci bude mít 100 000 Kč po deseti letech stejnou hodnotu, jakou má v dnešní době 74 409 Kč (peníze tak ztratí přes 25% své hodnoty).

Pedagogická poznámka: Část žáků rovnou dosadí do vzorce

$$I = \frac{I_0}{1+\frac{p}{100}} = \frac{100\,000}{(1+0,03)^{10}} = 74\,409,40 \text{ Kč}.$$

Poznámka: Stejný výsledek bychom získali opakovaným použitím vzorce $I = \dfrac{I_0}{1+\frac{p}{100}}$.

Abychom si to ještě jednou shrnuli. Pokud si nyní schováme doma do slamníku 100 000 Kč, budeme mít za deset let ve slamníku stále ještě 100 000 Kč, ale nakoupíme za ně v průměru pouze tolik zboží, jako bychom nyní (v okamžiku, kdy jsme peníze do slamníku dávali) nakoupili za 74 409 Kč.

Výsledky předchozích příkladů můžeme shrnout do vzorce:
Je-li průměrná roční míra inflace *p* procent a máme-li částku I_0, pak po *n* letech bude mít tato částka hodnotu $I = \dfrac{I_0}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}$.

Z předchozího vyplývá, že pokud uložíme na 3% úrok peníze a zároveň bude v období, po které spoříme, 3% inflace, budou mít peníze, které uspoříme, stejnou hodnotu jako peníze, které jsme uložili $\Rightarrow$ nic nevyděláme.
Předchozí odstavec nijak nepopírá výhodnost spoření, protože sice nic nevyděláme, ale zároveň nic neztratíme (jako bychom ztratili, kdybychom peníze uložili do slamníku).

Mezi mírou inflace a roční úrokovou mírou dosažitelnou pro běžného vkladatele je velmi úzký vztah a za normální situace můžeme předpokládat, že úrok přibližně pokryje ztráty způsobené inflací.

Dodatek: V ČR je inflace většinou trochu vyšší než běžné zhodnocení na spořících účtech nebo termínovaných vkladech.

Dodatek: Zvyšování roční úrokové míry centrální bankou je jednou ze základních zbraní, kterými centrální banky bojují proti inflaci. Vyšší úrokové míry motivují lidi ke spoření $\Rightarrow$ lidé mají méně peněz na utrácení $\Rightarrow$ producenti mají menší možnost při nižší poptávce zvyšovat ceny. Naopak snižováním úrokových měr se centrální banky snaží inflaci zvyšovat (půjčky jsou výhodnější $\Rightarrow$ lidé si více půjčují $\Rightarrow$ producenti mohou zvyšovat ceny).

Poznámka: Místo správného vzorce $I = \dfrac{I_0}{\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n}$ je pro inflaci často používán vzorec $I = I_0\left(1-\dfrac{p}{100}\right)^n$. Vzniká ze vzorce pro složené úrokování $I = I_0\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$ změnou znaménka (inflace na rozdíl od spoření hodnotu ubírá). Vzorec $I = I_0\left(1-\dfrac{p}{100}\right)^n$ s uvedeným zdůvodněním je pro žáky velmi dobře přijatelný, bohužel je nesprávný, i když na přibližné určení hodnoty je vyhovující. Například pro příklad 2 bychom získali
$I = I_0\left(1-\dfrac{p}{100}\right)^n = 100\,000\left(1-\dfrac{3}{100}\right)^{10} = 73\,742$ Kč, což je jen o 667 Kč méně než správně určená hodnota. Ke zmatku přispívají i MFCH tabulky, kde je tento vzorec uveden jako vzorec pro pokles hodnoty.

Př. 3: Porovnej vzorec pro změnu hodnoty kvůli inflaci se vzorcem pro částku uspořenou při složeném úrokování. Vysvětli.

Inflace: $I = \dfrac{I_0}{\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n}$, naspořená částka při složeném úrokování $I = I_0\left(1+\dfrac{p}{100}\cdot 0{,}85\right)^n$.
Vzorce upravíme:

- Inflace: vyjádříme si I_0: $I = \dfrac{I_0}{\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n} \Rightarrow I_0 = I\cdot\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$.
- Spoření: zanedbáme daň z příjmů: $I = I_0\left(1+\dfrac{p}{100}\cdot 0{,}85\right)^n \Rightarrow I = I_0\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$.

Po úpravě se vzorce (až na označení I a I_0) shodují, protože částka potřebná k nakoupení zboží se při inflaci zvyšuje zcela stejným způsobem jako částka naspořená při složeném úrokování (jen není snižována strháváním daně). Význam proměnných I a I_0 je u inflace prohozený, protože známe konečnou částku (částku, jejíž hodnota bude snižována inflací).

Průběžné spoření
Ze vztahu mezi inflací a roční úrokovou mírou vyplývá, že ušetřit výraznější částku pomocí jediného vkladu je v podstatě nemožné. Klasické spoření však probíhá jinak, neuložíme pouze jednou, ale ukládáme průběžně (většinou stále stejnou částku).
Například při stavebním spoření ukládáme každý měsíc 1500 Kč.

Rozebereme si nyní tento případ:

Př. 4: Pavel si na konci roku 2019 (pro jednoduchost předpokládáme 31.12. 2019) založil osobní konto s roční úrokovou mírou 2 % a měsíčním úrokovacím obdobím. Při založení účtu uložil 2 000 Kč a stejnou částku pak ukládal na konci každého dalšího měsíce. Urči, jakou částku si tímto způsobem našetří za 5 let. Jakou část z našetřené částky tvoří jeho vklady a jakou úroky zaplacené bankou?

Výsledný výraz asi nebude jednoduchý $\Rightarrow$ nebudeme počítat hodnoty, spíše se budeme snažit najít nějakou závislost, která by umožnila sestavit vzorec.
Sledujeme naspořenou částku po jednotlivých měsících:

po prvním měsíci: $2\,000\left(1+\frac{2}{100\cdot 12}\cdot 0,85\right)+2\,000$ (částka vložená na začátku s úroky + nově uložená částka)

po druhém měsíci: $2\,000\left(1+\frac{2}{100\cdot 12}\cdot 0,85\right)^2+2\,000\left(1+\frac{2}{100\cdot 12}\cdot 0,85\right)+2\,000$ (částka vložená na začátku úročená dvakrát + částka vložená po prvním měsíci úročená jednou + nově uložená částka)

po třetím měsíci:

$$2\,000\left(1+\frac{2}{100\cdot 12}\cdot 0,85\right)^3+2\,000\left(1+\frac{2}{100\cdot 12}\cdot 0,85\right)^2+2\,000\left(1+\frac{2}{100\cdot 12}\cdot 0,85\right)+2\,000$$

(částka vložená na začátku úročená třikrát + částka vložená po prvním měsíci úročená dvakrát + částka vložená po druhém měsíci úročená jednou + nově uložená částka)

$\Rightarrow$ naspořenou částku tvoří součet prvních n členů geometrické posloupnosti $a_1=2\,000$, $q=\left(1+\frac{2}{100\cdot 12}\cdot 0,85\right)$

situace po 5 letech $\Rightarrow$ sčítáme $5\cdot 12+1=61$ členů (vklad na konci roku 2019 je navíc)

$$s_{61}=a_1\frac{q^{61}-1}{q-1}=2\,000\cdot\frac{\left(1+\frac{2}{100\cdot 12}\cdot 0,85\right)^{61}-1}{\left(1+\frac{2}{100\cdot 12}\cdot 0,85\right)-1}=127332,50 \text{ Kč}$$

Peníze vložené Pavlem: $61\cdot 2000=122\,000$ Kč.
Úroky zaplacené bankou: $127\,332,5-122\,000=5\,332,5$ Kč.

Př. 5: Urči, kolik by Pavel naspořil za stejných podmínek za 20 let. Jakou částku by vložil on? Kolik by zaplatila banka na úrocích?

Rovnou začneme dosazovat: 20 let spoření = $20\cdot 12+1=241$ úrokovacích období.
Dosadíme do vzorců:

Naspořená částka: $s_{241}=a_1\frac{q^{241}-1}{q-1}=2000\cdot\frac{\left(1+\frac{2}{100\cdot 12}\cdot 0,85\right)^{241}-1}{\left(1+\frac{2}{100\cdot 12}\cdot 0,85\right)-1}=574\,022,80$ Kč.

Peníze vložené Pavlem: $241 \cdot 2000 = 482\,000$ Kč.
Úroky zaplacené bankou: $690\,048 - 482\,000 = 92\,022{,}80$ Kč.

Př. 6: Využij výsledky předchozích příkladů a zapiš vzorec pro výpočet částky *S*, kterou vkladatel našetří, pokud uloží na začátku úrokovacího období částku I_0 a pak ukládá pravidelně na konci každého z *n* úrokovacích období stejnou částku I_0, úroková míra pro dané úrokovací období je *p*, daň z úroků je 15%.

$$S = I_0 \frac{\left(1+0{,}85\cdot\frac{p}{100}\right)^{n+1}-1}{\left(1+0{,}85\cdot\frac{p}{100}\right)-1} = I_0 \frac{\left(1+0{,}85\cdot\frac{p}{100}\right)^{n+1}-1}{0{,}85\cdot\frac{p}{100}}$$

Předchozí příklad můžeme zobecnit do následujícího vzorce:

Pokud vkladatel uloží na začátku úrokovacího období částku I_0 a pak ukládá pravidelně na konci každého úrokovacího období stejnou částku I_0, pokud je úroková míra pro dané úrokovací období *p*, daň z úroků je 15%, naspoří vkladatel po uplynutí *n* úrokovacích období částku *S*, která je dána vztahem:

$$S = I_0\left(1+0{,}85\cdot\frac{p}{100}\right)^{n} + I_0\left(1+0{,}85\cdot\frac{p}{100}\right)^{n-1} + \ldots + I_0\left(1+0{,}85\cdot\frac{p}{100}\right)^{1} + I_0$$

$$S = I_0 \frac{\left(1+0{,}85\cdot\frac{p}{100}\right)^{n+1}-1}{\left(1+0{,}85\cdot\frac{p}{100}\right)-1} = I_0 \frac{\left(1+0{,}85\cdot\frac{p}{100}\right)^{n+1}-1}{0{,}85\cdot\frac{p}{100}}$$

Př. 7: Jakou částku naspoříme, pokud budeme ukládat na konci každého čtvrtletí 15 000 Kč po dobu 10 let na účet s roční úrokovou mírou 1,2 % a čtvrtletním úrokovacím obdobím? Daň z úroků je 15%. Vypočti celkovou vloženou částku i úroky zaplacené bankou.

Úroková míra přepočtená na čtvrtletí: $\frac{1{,}2}{4}$

Počet úrokovacích období: $4 \cdot 10 = 40$ (předpokládáme vklad na konci roku před začátkem spoření $\Rightarrow$ vkládali jsme 41x, úrokovalo se 40x)

$$S = I_0 \frac{\left(1+0{,}85\cdot\frac{p}{100}\right)^{n+1}-1}{0{,}85\cdot\frac{p}{100}} = 15\,000 \frac{\left(1+0{,}85\cdot\frac{1{,}2}{4\cdot 100}\right)^{40+1}-1}{0{,}85\cdot\frac{1{,}2}{4\cdot 100}} = 647\,430{,}40 \text{ Kč}$$

Celková vložená částka: $41 \cdot 15\,000 = 615\,000$ Kč.
Úroky zaplacené bankou: $647\,430{,}40 - 615\,000 = 32\,430{,}4$ Kč.

Př. 8: Urči naspořenou částku za 10 let při měsíční úložce 5000 Kč s roční úrokovou mírou 1,2 % a měsíčním úrokovacím obdobím. Daň z úroků je 15%.

Počet úrokovacích období: $12 \cdot 10 = 120$ (předpokládáme vklad na konci roku před začátkem spoření $\Rightarrow$ vkládali jsme 121x, úrokovalo se 120x)

$$S = I_0 \frac{\left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{p}{100}\right)^{n+1} - 1}{0{,}85 \cdot \frac{p}{100}} = 5000 \cdot \frac{\left(1 + 0{,}85 \cdot \frac{1{,}2}{12 \cdot 100}\right)^{12 \cdot 10 + 1} - 1}{0{,}85 \cdot \frac{1{,}2}{12 \cdot 100}} = 636\,921{,}90 \text{ Kč}$$

Celková vložená částka: $121 \cdot 5\,000 = 605\,000$ Kč.

Úroky zaplacené bankou: $636\,921{,}90 - 605\,000 = 31\,921{,}9$ Kč.

Dodatek: Na první pohled může být překvapivé, že v příkladu 8 (s kratším úrokovacím obdobím) našetříme menší částku (v příkladech s jedním vkladem z minulé hodiny platilo, že čím kratší úrokovací období, tím výhodnější podmínky pro spořitele). Situace se ujasní, když si uvědomíme, že v příkladu 7 máme uloženo hned od začátku 15 000, zatímco v příkladu 6 uložíme tuto částku až na začátku třetího měsíce.

Př. 9: Petáková:
strana 71/cvičení 65

Shrnutí: Při průběžném spoření je výsledná částka rovna součtu geometrické řady.